



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**OPTIMALIZACE TOPOLOGIE KMITAJÍCÍHO
NOSNÍKU SLOŽENÉHO Z VÍCE MATERIÁLŮ**

MULTI-MATERIAL TOPOLOGY OPTIMIZATION OF THE VIBRATING BEAM

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Tomáš Kordula

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Petr Lošák, Ph.D.

BRNO 2020

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Bc. Tomáš Kordula
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce:	Ing. Petr Lošák, Ph.D.
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Optimalizace topologie kmitajícího nosníku složeného z více materiálů

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Optimalizace topologie vede ke zlepšení vybraných vlastností objektu, např. snížení hmotnosti, zvýšení tuhosti, atd. Díky rozvoji 3D tisku lze vytvořit i poměrně komplikované struktury. V současné době nejmodernější tiskárny dokážou kombinovat i více materiálů (např. hliník a měď), což otevírá nové možnosti v návrhu strojních součástí. Cílem práce je jednak provést rešerši algoritmů pro více-rozměrovou topologickou optimalizaci a vybraný algoritmus aplikovat na optimalizaci topologie kmitajícího nosníku. Cílem je např. maximalizovat vlastní frekvence při daných rozměrech nosníku.

Cíle diplomové práce:

1. Nastudovat metody topologické optimalizace kontinua s uvažováním jednoho materiálu a vybrané naprogramovat v prostředí ANSYS Classic s využitím jazyka APDL.
2. Nastudovat metody více-materiálové topologické optimalizace a naprogramovat je opět v prostředí ANSYS, případně Matlab, nebo Python
3. Využít výše uvedené metody pro optimalizaci vnitřní více-materiálové struktury kmitajícího nosníku (např. s cílem maximalizovat vlastní frekvence při daných rozměrech nosníku).

Seznam doporučené literatury:

ANSYS Inc, ANSYS Release 18.1 User's Manual, Swanson Analysis Sys. Inc, Pennsylvania 2016.

BENDSOE, M. P., Optimization of Structural Topology, Shape, and Material , 1st ed., 273 pp., Springer, New York 1995.

QUERIN, O. M., VICTORIA, M., and MARTI, P., Topology Design Methods for Structural Optimization, 1st ed., 204 pp., Elsevier, Academic Press, London 2017.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt:

Tato diplomová práce se zabývá optimalizací topologie nosníku skládajícího se jak z jednoho, tak i více materiálů zatíženého staticky nebo dynamicky. Zaměřuje se na návrh struktury s cílem minimalizace poddajnosti, nebo maximalizace vlastní frekvence. Pro řešení jednotlivých problémových situací jsou napsány výpočetní programy v jazyku Python samostatně a také v kombinaci s komerčním softwarem ANSYS APDL.

Klíčové slova:

Optimalizace topologie, metoda konečných prvků, návrh s minimální poddajností, návrh s maximalizací vlastní frekvence

Abstract:

The master's thesis deals with optimization of continuum consisting of one or more different materials loaded statically or dynamically. The thesis aims on minimum compliance design and maximum eigen frequency design. For solution of each problem situation are written computational programmes in Python language itself and also as combination with commercial software ANSYS APDL.

Keywords:

Topology optimization, finite element method, continuum, minimum compliance design, maximum eigen frequency design

Bibliografická citace:

KORDULA, Tomáš. Optimalizace topologie kmitajícího nosníku složeného z více materiálů. Brno, 2020. 81 s. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/121567>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Petr Lošák.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „*Optimalizace topologie kmitajícího nosníku složeného z více materiálů*“ vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který tvoří přílohu této práce.

V Brně, dne

.....

Tomáš Kordula

Poděkování:

Rád bych poděkoval vedoucímu své bakalářské práce Ing. Petru Lošákovi, Ph.D za věnovaný čas, trpělivost, ochotu a odborné rady, které mi věnoval.

V neposlední řadě bych chtěl poděkovat rodičům, sourozencům, přítelkyni a blízké rodině, která mi poskytuje skvělé zázemí a podporuje při studiu.

OBSAH

1	ÚVOD.....	13
2	MOTIVACE A CÍLE PRÁCE.....	14
2.1	Analýza problémové situace.....	14
2.2	Formulace problému	14
2.3	Cíle práce.....	14
2.4	Systém podstatných veličin	15
2.5	Volba metody řešení.....	16
3	STRUKTURÁLNÍ OPTIMALIZACE.....	17
3.1	Optimalizace velikosti.....	17
3.2	Optimalizace tvaru	17
3.3	Optimalizace topologie.....	17
3.4	Obecná matematická formulace problému strukturální optimalizace.....	19
4	METODY OPTIMALIZACE TOPOLOGIE	21
4.1	Metody optimálního kritéria	21
4.2	Heuristické a intuitivní metody.....	24
5	VÍCEMATERIÁLOVÁ OPTIMALIZACE TOPOLOGIE.....	29
5.1	Algoritmus se střídající aktivní fází	31
6	PŘEHLED PUBLIKOVANÝCH ALGORITMŮ OPTIMALIZACE TOPOLOGIE 32	
7	METODA KONEČNÝCH PRVKŮ	33
8	PYTHON	37
9	OPTIMALIZACE TOPOLOGIE NOSNÍKU	39
9.1	Metoda konečných prvků	39
9.2	Metoda optimálního kritéria	41
9.3	Filtrace a citlivostní analýza	43
9.4	Problém 1: Jednomateriálová optimalizace topologie s cílem minimalizace poddajnosti	45
9.5	Optimalizace topologie s využitím knihovny pyansys.....	49
9.6	Problém 2: Jednomateriálová optimalizace topologie s cílem maximalizace vlastních frekvencí.....	51
9.7	Problém 3: Vícemateriálová optimalizace topologie s cílem minimalizace poddajnosti	55
9.8	Problém 4: Vícemateriálová optimalizace topologie s cílem maximalizace vlastní frekvence.....	61

9.9	Verifikace řešiče statické a dynamické úlohy.....	66
9.10	Celkové zhodnocení výsledků optimalizace topologie	69
10	Závěr.....	70
10.1	Cíle práce a přehled výsledků	70
10.2	Návrhy pro další rozvoj	70
11	Bibliografie	71
	SEZNAM ZKRATEK	73
	SEZNAM SYMBOLŮ	74
	SEZNAM OBRÁZKŮ	77
	SEZNAM TABULEK	79
	PŘÍLOHY	80

1 ÚVOD

Optimalizace topologie (dále OT), která se používá v úvodní fázi návrhu konstrukce, slouží ke zjištění optimálního rozložení materiálu uvnitř návrhového prostoru vzhledem k daným okrajovým podmínkám. S rozmachem techniky v 21. století je OT čím dál více vyhledávaným nástrojem. Většinou se používá za účelem snížení hmotnosti a tedy například také snížení spotřeby materiálu při sériové výrobě a výraznému snížení nákladů se současným splněním požadavků na přenesené zatížení. Dále je možno OT využít s cílem zlepšení určitých vlastností při snižování hmotnosti. Těmito optimalizovanými vlastnostmi může být například poddajnost nebo vlastní frekvence. Tyto přístupy byly zpracovány v této práci.

Optimalizované součásti nepřipomínají pravidelné struktury, někdy se dokonce podobají biologickým strukturám, například kostem, a tím pádem je není možné vyrobit konvenčními výrobními metodami. Tuto nevýhodu se s rozvojem 3D tisku podařilo vyřešit a v současnosti lze tedy vyrobit struktury, které jsou velmi tvarově složité. Je také možné navrhnout konstrukce složené z více materiálů tak, aby výsledná struktura díky efektivní kombinaci materiálů odpovídala požadovaným vlastnostem.



Obr. 1: Optimalizovaná součást, vlevo původní geometrie, vpravo geometrie po optimalizaci topologie, převzato z ([Jennings, 2020](#))

2 MOTIVACE A CÍLE PRÁCE

2.1 Analýza problémové situace

Motivace pro zpracování této diplomové práce přišla s vývojem nejmodernějších 3D tiskáren, které dokážou kombinovat i více materiálů (např. hliník a ocel). To otevírá nové možnosti v návrhu strojních součástí a tím pádem i v optimalizaci topologie a jejich metodách s různými požadavky na výslednou optimalizovanou strukturu. Naopak standartní nástroje pro optimalizaci topologie implementované v programu *ANSYS* nejsou schopny řešit úlohu optimalizace topologie se zahrnutím více než jednoho materiálu.

Tato diplomová práce pojednává o aplikaci jednomateriálové i vícemateriálové optimalizace topologie pro řešení statických a dynamických úloh.

2.2 Formulace problému

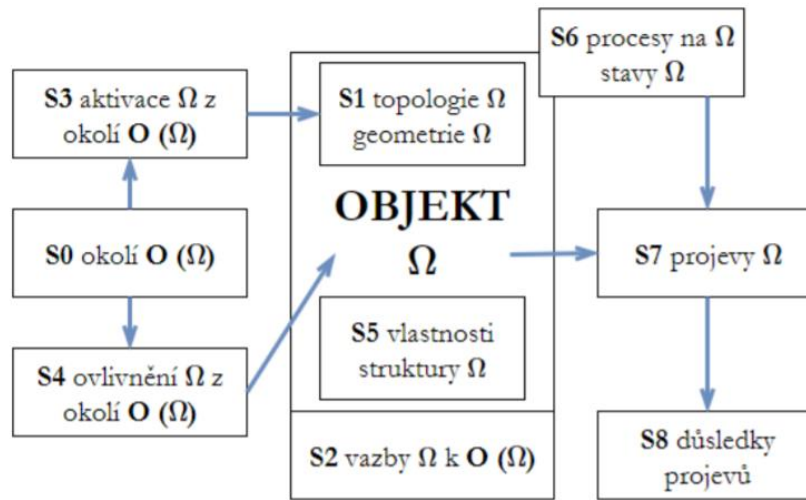
Na základě řešeršní části budou dle definovaných algoritmů napsány skripty pro optimalizaci topologie s cílem minimalizace poddajnosti a maximalizace vlastní frekvence konstrukce složené z jednoho či více materiálů. Dále bude pro statickou úlohu naprogramován skript pro jednomateriálovou optimalizaci topologie, který propojuje programovací prostředí *Python 3* a komerčního softwaru *ANSYS APDL*.

2.3 Cíle práce

Vzhledem k výše uvedenému problému jsou cíle práce stanoveny následovně:

- 1) Nastudovat metody optimalizace topologie kontinua s uvažováním jednoho materiálu a vybrané naprogramovat v prostředí *ANSYS Classic* s využitím jazyka *APDL*.
- 2) Nastudovat metody vícemateriálové optimalizace topologie a naprogramovat je opět v prostředí *ANSYS*, případně *Matlab*, nebo *Python*.
- 3) Využít výše uvedené metody pro optimalizaci vnitřní vícemateriálové struktury kmitajícího nosníku (např. s cílem maximalizovat vlastní frekvence při daných rozměrech nosníku).

2.4 Systém podstatných veličin



Obr. 2: Systém podstatných veličin, převzato z (Janiček, 2014)

Objektem Ω je nosník v rovině. Systém podstatných veličin $\Sigma(\Omega)$ zahrnuje následující množiny:

S₀ Prvky okolí entity

Vzhledem k problémové situaci není nutno do výpočtu zahrnovat vliv okolí entity.

S₁ Veličiny popisující strukturu a topologii objektu

Výchozí struktura je jedním ze vstupních parametrů algoritmu a je vzhledem k řešení 2D úlohy zadávána počtem prvků v ose x a ose y.

S₂ Vazby objektu s okolím a na nich probíhající interakce

Nosník je v případě statické úlohy vetknut na své levé hraně a v případě dynamické úlohy je podepřen na obou jeho kratších hranách.

S₃ Aktivace objektu z okolí

Při řešení statické úlohy je nosník zatížen silou v záporném směru osy y. Při dynamické úloze je uvažováno vlastní kmitání.

S₄ Ovlivnění objektu z okolí

Přítomnost vazby definované v S₂.

S₅ Veličiny popisující vlastnosti jednotlivých prvků objektu

Vlastnosti jsou popsány modulem pružnosti E , Poissonovým poměrem μ a u dynamické úlohy ještě hustotou ρ .

S₆ Veličiny popisující procesy probíhající na objektu

Síla při řešení statické úlohy a vlastní kmitání při dynamické úloze.

S7 Veličiny popisující chování objektu

Primárně deformace (posuvy, přetvoření) při statické úloze a vlastní frekvence při úloze dynamické.

S8 Veličiny popisující důsledky chování objektu

Nevhodným návrhem výsledné topologie může být zapříčiněno nesplnění požadavku na vlastnosti výsledné struktury, například nedostatečného zvýšení tuhosti při statické úloze. V krajním případě může dojít k dosažení mezního stavu deformace.

2.5 Volba metody řešení

Jak je již uvedeno v kapitole 2.1 definující problémovou situaci, metoda řešení je volena s ohledem na možnosti výpočetních programů MKP. Vzhledem k omezení těchto programů pro řešení vícemateriálové OT standartní cestou, bez doprogramování vícemateriálové OT, jsou algoritmy napsány ve volně dostupném programovacím jazyku *Python 3*. S cílem práce v podobě efektivního propojení s nejhojněji využívaným MKP softwarem *ANSYS* je také využito programovacího jazyku *APDL* k tvorbě modelu. Část řešení úlohy optimalizace a vykreslení výsledků je již provedeno v *Pythonu*.

3 STRUKTURÁLNÍ OPTIMALIZACE

Po druhé světové válce přinesl rapidní vývoj leteckého průmyslu, například s požadavkem na nízkou hmotnost, mnoho inženýrských příležitostí. Důsledkem bylo zpopularizování metod strukturální optimalizace. Tyto metody se začaly významně rozvíjet spolu se zvyšujícím se výkonem počítačů a výpočetních algoritmů. (Zhang, et al., 2016)

Strukturální optimalizace spočívá v určení nejvhodnějšího rozložení materiálu uvnitř návrhového prostoru spolu s ohledem na přenesení působícího zatížení. Požadovanými výstupními optimalizovanými parametry může být snížení napětí, zvýšení tuhosti, snížení výchylek nebo změna vlastní frekvence. Metody strukturální optimalizace jsou obecně rozdělovány do tří kategorií: optimalizace velikosti, optimalizace tvaru a optimalizace topologie. (Querin, et al., 2017)

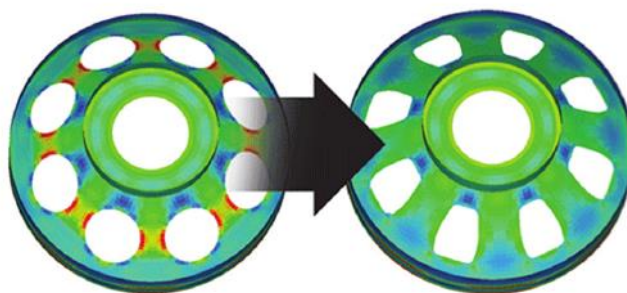
3.1 Optimalizace velikosti

Při optimalizaci velikosti víme, jak má výsledná struktura vypadat, ovšem není známa velikost jednotlivých částí. Typickým příkladem této optimalizace může být prutová soustava, u které je potřeba stanovit příčné průřezy jednotlivých prutů. Dalším příkladem může být určení délek jednotlivých prutů v prutové soustavě nebo zjištění rozměrů jednotlivých prutových elementů příhradové konstrukce. (Querin, et al., 2017)

3.2 Optimalizace tvaru

Optimalizace tvaru se zaměřuje na návrh strukturálních hranic dané struktury. (Zhang, et al., 2016)

Tvar nebo hranice může být reprezentována buď neznámou rovnicí nebo několika body, jejichž umístění není známo. (Querin, et al., 2017)



Obr. 3: Tvarová optimalizace, převzato z (Zhang, et al., 2016)

3.3 Optimalizace topologie

Pokud není známo, jaký má mít výsledná struktura tvar (optimalizace tvaru) nebo velikost (optimalizace velikosti), je využita optimalizace topologie. Jednou ze dvou hlavních

vlastností optimalizace topologie je to, že elasticita jako funkce hustoty materiálu se může měnit přes celý návrhový prostor. Optimalizace topologie spočívá v nalezení optimálního rozložení materiálu uvnitř návrhového prostoru vzhledem k okrajovým podmínkám. Druhou vlastností je to, že materiál může být trvale odstraněn z návrhového prostoru. (Querin, et al., 2017)

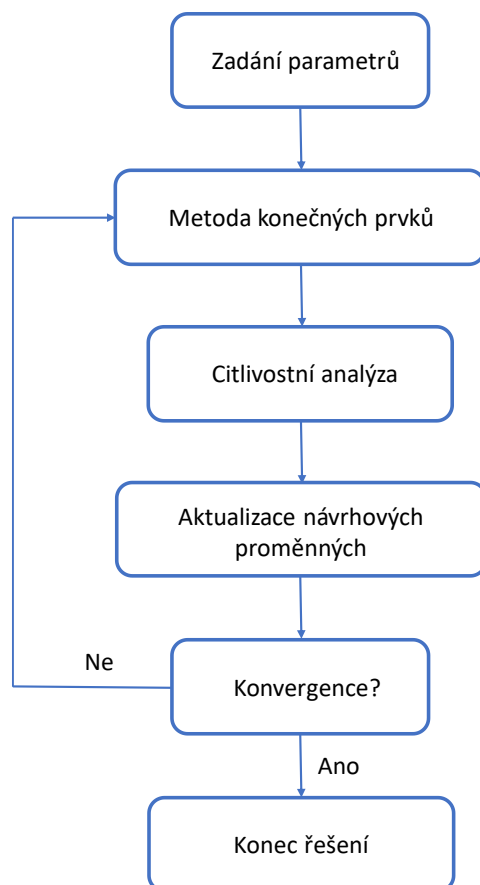
Cílem optimalizace topologie je zlepšit určité vlastnosti součásti. Na počátku optimalizace topologie máme většinou návrhový prostor složený z reálného materiálu. Následnou optimalizací topologie kromě reálného materiálu v návrhovém prostoru vzniká virtuální materiál neboli dutina. Pak mluvíme o vzniku tzv. „0-1“ designu (0 - virtuální materiál, 1 - reálný materiál).

Strukturální optimalizaci topologie můžeme rozdělit na dvě části:

Optimalizace dispozice („*Layout optimization*“) – v tomto případě se optimalizace soustředí na prutové a rámové konstrukce. Dochází k současné optimalizaci topologie (spojení jednotlivých členů), geometrie (umístění vazeb) a velikosti (příčné průřezy). (Rozvany, et al., 2014)

Zobecněná optimalizace tvaru („*Generalized Shape Optimization*“) – může být chápána také jako vícemateriálová optimalizace, kdy pro každý element můžeme zvolit jeden z materiálů nebo žádný z nich. (Rozvany, et al., 2014)

Obecný algoritmus optimalizace topologie se skládá z jednotlivých kroků, které jsou zobrazeny na *Obr. 4*:



Obr. 4: Obecný algoritmus optimalizace topologie, vlastní zpracování

3.4 Obecná matematická formulace problému strukturální optimalizace

Problematika optimalizace je založena na následujících definicích:

Funkce minima (f) - tato funkce má význam vytvoření hodnocení návrhů. Funkce minima f generuje známku, která nám řekne, jestli je výsledek pro optimalizaci pozitivní, či nikoliv. Je jí využíváno pro ověřování návrhů z hlediska hmotnosti, posuvu, napětí atd.

Návrhová proměnná (ρ) – funkce nebo vektor popisující design nebo materiály použité u návrhové struktury. Během optimalizace může být měněna.

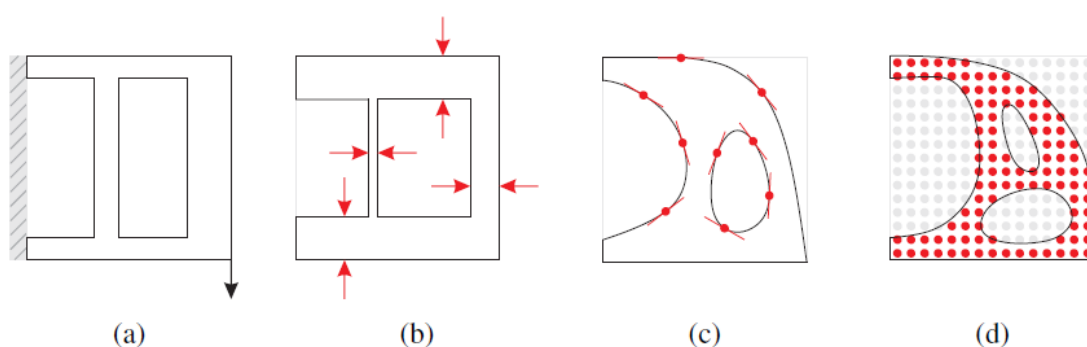
Stavová proměnná (y) – jedná se o funkci nebo vektor, který představuje odezvu struktury definovanou návrhovou proměnnou ρ . Odezvou může být například napětí, deformace, síla atd. (Gonçalves, 2018), (Sanches, 2015)

Pomocí těchto definic je možné popsat jednotlivé druhy strukturální optimalizace následovně:

Optimalizace velikosti – vztahuje se k případům, kdy x může být tloušťkou, příčným průřezem nebo délkou určitého členu optimalizované struktury.

Optimalizace tvaru – je schopna modifikovat pozici a geometrii hranic struktury parametrizací tvaru návrhové struktury. Příklad návrhových proměnných x při optimalizaci velikosti je vyobrazen v následujícím Obr. 5 červeně.

Optimalizace topologie – ve 2D případě může optimalizaci podléhající tloušťka návrhové struktury nabýt nulové hodnoty. Ve 3D případě je proměnnou hustota a může nabývat pouze hodnot „1“ nebo „0“. (Gonçalves, 2018), (Sanches, 2015)



Obr. 5: (a) příklad problému strukturální optimalizace, (b) optimalizace velikosti, (c) optimalizace tvaru, (d) optimalizace topologie, převzato z (Sanches, 2015)

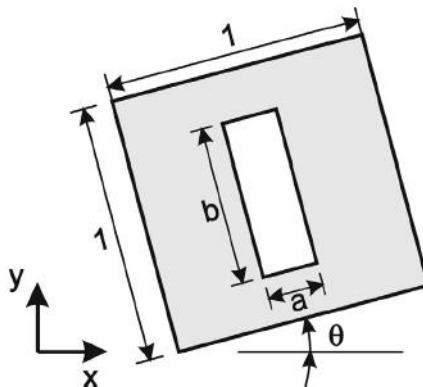
4 METODY OPTIMALIZACE TOPOLOGIE

4.1 Metody optimálního kritéria

Jedná se o nepřímé metody optimalizace, které jsou vhodné pro řešení problémů s velkým počtem návrhových proměnných.

4.1.1 Metoda homogenizace

Při této metodě se kromě problému optimalizace topologie řeší také problém tvarové optimalizace. Topologie je vytvořena z nekonečného množství mikrodutin a úkolem je najít jejich optimální rozložení a tvar. Mikrodutiny jsou tedy návrhovými proměnnými. Pokud použijeme pro síťování čtvercovou 2D strukturu, každý z těchto prvků má jeden typ mikrostruktury, pokud se jedná o izotropní materiály. Následně je každému prvku přiřazena velikost mikrodutiny s cílem minimalizace optimalizovaného parametru. V následujícím *Obr. 6* je zobrazen prvek izotropní materiálové struktury s určitou šířkou (a), výškou (b) a orientací (θ). (Querín, et al., 2017)



Obr. 6: Prvek izotropního materiálu o rozměrech $a \times b$ a orientaci θ , převzato z (Querín, et al., 2017)

Metodu homogenizace lze popsat rovnicí (4.1):

$$\max: \Pi(u) \quad (4.1)$$

za podmínek:

$$\sum_{e=1}^N (1 - a_e b_e) v_e - \bar{V}_s \leq 0 \quad (4.2)$$

$$a_e - 1 \leq 0 \quad (4.3)$$

$$-a_e \leq 0 \quad (4.4)$$

$$b_e - 1 \leq 0 \quad (4.5)$$

$$-b_e \leq 0 \quad (4.6)$$

$$a_e, b_e, \theta_e: e = 1, 2, \dots, N, \quad (4.7)$$

kde Π je celková potenciální energie, a_e je šířka dutiny, b_e je výška dutiny, θ_e je orientace dutiny a v_e je objem e-tého konečného prvku. (Querín, et al., 2017)

4.1.2 Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)

Jedná se o metodu odvozenou pro tuhý izotropní materiál. Narozdíl od metody homogenizace je zde navíc zahrnuta určitá penalizace p .

SIMP je historicky nejrozšířenější metodou optimalizace topologie v komerčních softwarech využívajících metodu konečných prvků. Myšlenkou této metody je použití pouze jedné návrhové proměnné na jeden prvek sítě konečných prvků. Touto proměnnou je virtuální hustota ρ_e , pro niž platí: $0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1$. Pomocí ρ_e je definován objem návrhového prostoru:

$$V = \sum_{e=1}^N v_e \rho_e, \quad (4.8)$$

kde N je celkový počet konečných prvků použitých pro popis návrhového prostoru, ρ_e je virtuální hustota e-tého konečného prvku, v_e je objem e-tého konečného prvku, a V je výsledný objem návrhového prostoru.

Pomocí ρ_e je odvozen také vzorec pro výpočet modulu pružnosti daného elementu E_e :

$$E_e = \rho_e^p E_e^0, \quad (4.9)$$

kde E_e^0 je původní modul pružnosti, E_e je nový virtuální modul pružnosti daného elementu, p je penalizační faktor, který v prvním kroku nabývá hodnoty 1 a následně se zvyšuje (obvykle je potřeba $p > 3$), než se dosáhne designu „0-1“ (jasné rozlišení mezi virtuálním a reálným materiálem).

Metodu SIMP s cílem minimalizace poddajnosti popisuje následující rovnice:

$$\min: c(\rho_e) = F^T \mathbf{u} \quad (4.10)$$

za podmíněk:

$$\left[\sum_{e=1}^N \rho_e^p \mathbf{K}_e \right] \mathbf{u} \leq F \quad (4.11)$$

$$\left[\sum_{e=1}^N \rho_e^p \mathbf{K}_e \right] \mathbf{u} \leq F \quad (4.12)$$

$$\sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq \bar{V}_s \quad (4.13)$$

$$0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1: e = 1, 2, \dots, N \quad (4.14)$$

$$p = 1, 2, \dots, p_{max}: p_{max} > 3 \quad (4.15)$$

kde c je poddajnost současti, \bar{V}_s je maximální objem prvku, \mathbf{K}_e je matice tuhosti e -tého prvku a \mathbf{F} je vektor zatížení. (Querín, et al., 2017)

Metodu SIMP s cílem maximalizace vlastních frekvencí popisují následující rovnice:

$$\max_{\rho_1, \dots, \rho_{N_E}} \left\{ \min_{j=1, \dots, J} \left\{ \omega_j^2 \right\} \right\} \quad (4.16)$$

za podmínek:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_j = \omega_j^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_j, \quad (j = 1, \dots, J), \quad (4.17)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_k = \delta_{jk}, \quad (j \geq k; k, j = 1, \dots, J), \quad (4.18)$$

$$\sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq \bar{V}_s, \quad (\bar{V}_s = \alpha V_0), \quad (4.19)$$

$$0 < \underline{\rho} \leq \rho_e \leq 1, \quad (e = 1, \dots, N_E), \quad (4.20)$$

kde ω_j je j -tá vlastní frekvence, $\boldsymbol{\varphi}_j$ je příslušný vlastní vektor, \mathbf{K} je globální matice tuhosti, \mathbf{M} je globální matice hmotnosti, J vyhovuje podmínce $0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_J$ za předpokladu, že příslušné vlastní vektory jsou orthonormální, δ_{jk} je Kroneckerovo delta, ρ_e pro $e = 1 \dots N_E$ je návrhová proměnná představující objemovou materiálovou hustotu materiálu, poslední rovnice (4.20) představuje dolní a horní hranici návrhové proměnné. Z důvodu zabránění singularity je $\underline{\rho}$ definováno jako malé kladné číslo ($\underline{\rho} = 10^{-3}$), α je objemovým poměrem. (Du, et al., 2007), (Du, et al., 2005)

4.1.3 Modifikovaná metoda SIMP

Modifikovaná verze SIMP oproti klasické metodě SIMP v sobě skrývá velké množství výhod, kdy tou nejdůležitější je možnost přímé filtrace (více vysvětleno níže). (Sigmund, 2007) Rozdíl oproti klasické metodě je v základním vztahu metody pro výpočet modulu pružnosti určitého elementu. U modifikované metody SIMP je v tomto vztahu obsažen člen E_{min} , který představuje velmi malý modul pružnosti přiřazený virtuálnímu materiálu neboli dutině („void“). Současně zavedením tohoto parametru je zabráněno tomu, aby matice tuhosti byla singulární. Vztah pro modul pružnosti daného elementu poté vypadá následovně:

$$E_e(\rho_e) = E_{min} + \rho_e^p (E_{max} - E_{min}), \quad (4.21)$$

kde E_{max} je modul pružnosti materiálu, E_{min} je velmi malý modul pružnosti virtuálního materiálu, p je penalizační faktor a ρ_e je návrhová proměnná daného elementu.

Matematická formulace optimalizačního problému minimalizace poddajnosti:

$$\min: c(\rho) = \{U\}^T K U = \sum_{e=1}^N E_e u_e^T \mathbf{k}_0 u_e, \quad (4.22)$$

kde

$$\frac{V(\rho)}{V_0} = vf \quad (4.23)$$

$$K U = F \quad (4.24)$$

$$0 \leq \rho \leq 1. \quad (4.25)$$

c představuje poddajnost, U je globálním vektorem posunutí, F je globálním vektorem síly, K je globální matice tuhosti, u_e je vektor posuvu elementu, \mathbf{k}_0 je matice tuhosti elementu, ρ je návrhová proměnná, N je počet elementů, $V(\rho)$ a V_0 jsou cílový objem materiálu a původní objem, vf je objemový poměr.

4.2 Heuristické a intuitivní metody

Tyto metody jsou odvozeny z intuice, pozorování technického procesu nebo například biologických systémů. Tyto metody nemohou vždy zaručit optimálnost, ale mohou poskytnout uskutečnitelné efektivní řešení, ne nutně založené na matematických principech. Hlavní výhodou heuristických metod je nižší časová náročnost výpočtu, nicméně negarantují konvergenci k minimu. (Querín, et al., 2017), (Montes, 2016)

4.2.1 Evolutionary Structural Optimization (ESO)

„*Evolutionary Structural Optimization*“, neboli vyvíjející se strukturální optimalizace je metodou, která spočívá v odebírání neúčinného materiálu z původní struktury za účelem získání optimálního designu. (Querín, et al., 2017) Hlavní myšlenkou metody ESO je konečnoprvková analýza elastického problému přes celý návrhový prostor, kdy v každém prvku se vypočítá určité kritérium (např. napětí, vlastní frekvence nebo posuvy). Proces se iterativně opakuje, dokud není dosaženo podmínky konvergence pro dané kritérium. (Querín, et al., 2017), (Montes, 2016)

ESO algoritmus:

1. Definice maximálního návrhového prostoru rozděleného sítí konečných prvků, zadání okrajových podmínek, zatížení, materiálových vlastností. Aplikace kritéria, podle kterého se bude optimalizovat.
2. MKP analýza.
3. Všechny elementy, které splňují následující vztah, se odstraní z návrhového prostoru.

$$\sigma_e \leq RR_s \times \sigma_{max}, \quad (4.26)$$

kde σ_e je napětí e-tého elementu, RR_s je odebírací poměr s-tého rovnovážného stavu (typická počáteční hodnota RR_0 je 0,01), σ_{max} je maximální napětí dané struktury.

$$RR_{s+1} = RR_s + ER \quad (4.27)$$

4. Opakování kroků 2 a 3, dokud žádný element nebude splňovat rovnici (4.9).
5. Následně je dosaženo rovnovážného stavu a odebírací poměr je upraven dle rovnice $s=s+1$.
6. Opakování kroků 2 až 5 dokud:
 - a) není dosaženo maximálního odebíracího poměru (většinou 0,25)
 - b) dosáhli jsme požadovaného zredukovaní hmotnosti (většinou 0,3)

4.2.2 Bidirectional Evolutionary Structural Optimization (BESO)

„*Bidirectional Evolutionary Structural Optimization*“ je oproti předchozí metodě dvousměrná, a kromě pouhého odstraňování elementů, jak je tomu v případě ESO metody, elementy také přidává. Řeší tím tedy nedostatek metody ESO, kdy po odstranění materiálu nelze materiál již přidat zpět do návrhového prostoru. (Querín, et al., 2017), (Montes, 2016)

BESO algoritmus:

1. Definice maximálního návrhového prostoru rozděleného sítí konečných prvků, zadání okrajových podmínek, zatížení, materiálových vlastností. Definice kritéria, podle kterého se bude optimalizovat.
2. MKP analýza.
3. Všechny elementy, které splňují následující vztah se odstraní z návrhového prostoru.

$$\sigma_e \leq IR_s \times \sigma_{max} \quad (4.28)$$

kde σ_e je napětí e-tého elementu, IR_s je odebírací poměr s-tého rovnovážného stavu (typická počáteční hodnota IR_0 je 0,99), σ_{max} je maximální napětí dané struktury.

4. Kolem prvků, které splňují následující vztah je přidán materiál.

$$\sigma_e \geq IR_s \times \sigma_{max}, \quad (4.29)$$

kde IR_s je přidávací poměr s-tého rovnovážného stavu.

$$IR_{s+1} = IR_s - EIR, \quad (4.30)$$

kde EIR je vývojový přidávací poměr (typická hodnota je 0,01).

5. Opakování kroků 2 až 4, dokud žádný element nebude splňovat rovnice (4.28) a (4.29).
6. Následně je dosaženo rovnovážného stavu a odebírací poměr je upraven dle rovnice $s=s+1$.
7. Opakování kroků 2 až 6, dokud není dosaženo požadovaného zredukovaní hmotnosti.

4.2.3 Fully Stressed Design (FSD)

FSD je velice intuitivní metoda optimalizace velikosti a topologie. Její název „*Fully Stressed Design*“ znamená v překladu „plně zatížený design“. Cílem FSD metody je dosažení homogenního napětí v jednotlivých členech soustavy. V průběhu optimalizace je odebírán materiál z prvků soustavy, které nejsou plně zatíženy a přetíženým prvkům se materiál přidává. Jedná se o metodu vhodnou pro optimalizaci kontinua nebo prutových soustav. (Querín, et al., 2017)

FSD algoritmus:

1. Struktura je rozdělena na N prvků (pruty, nosníky...) s přiřazením N návrhových proměnných.
2. Definice přípustné hodnoty napětí $\sigma_j^{dovolené}$, která může být stejná či rozdílná pro tah a tlak.
3. Výpočet napětí ve struktuře pomocí metody konečných prvků pro každou iteraci.
4. Hodnota každé návrhové proměnné pro další iteraci (i+1) je vypočítána pomocí aktualizacího schématu:

$$x_j^{i+1} = x_j^i \times F_j^i \quad (4.31)$$

$$F_j^i = \max\left(\frac{\sigma_j^i}{\sigma_j^{dovolené}}\right), \quad (4.32)$$

kde i je číslo iterace, j je číslo návrhové proměnné, x_j^i je hodnota j -té návrhové proměnné, σ_j^i je hodnota napětí pro j -tou návrhovou proměnnou, $\sigma_j^{dovolené}$ je přípustná hodnota napětí pro j -tou návrhovou proměnnou, F_j^i je hodnota poměru mezi určitou hodnotou napětí σ_j^i a dovolenou hodnotou napětí, $\sigma_j^{dovolené}$. (Querín, et al., 2017)

4.2.4 Metoda CAO

Metoda s názvem „*Computer-Aided Optimization*“ („Počítačem řízená optimalizace“) neslouží běžně k optimalizaci celé součásti, ale k optimalizaci špiček napětí v kritických místech soustavy.

Metoda je inspirována biologickým růstem, kdy bobtnání prvků simuluje přidávání materiálu do struktury a smršťující proces simuluje odstranění materiálu ze struktury v závislosti na rozložení napětí, které se vypočítá pomocí MKP užitím pseudotermálního rozložení napětí. (Querín, et al., 2017)

CAO algoritmus:

1. Definice 2 konečnoprvkových modelů:
 - a. první model reprezentující skutečný návrhový prostor s příslušnými vazbami a zatížením

- b. druhý model simulující proces termálního bobtnání předepsáním termálního zatížení povrchu, kde je modul pružnosti nastaven na hodnotu modulu pružnosti 1/400 vzhledem k modulu pružnosti modelu a .
2. Stanoví se rozložení napětí modelu a .
3. Rozložení napětí z kroku 2 je využito pro stanovení rozložení teplot

$$T_n = T_{ref} + k_1 \frac{(\sigma_n - \sigma_{ref})}{\sigma_{ref}}, \quad (4.33)$$

kde n je číslo uzlu sítě konečných prvků, T_{ref} je referenční teplota bobtnající a smršťující struktury, σ_n je napětí n -tého uzlu, σ_{ref} je cílové napětí struktury, k_1 je měřítko (obvykle 100) a T_n je teplota, která bude předepsána pro n -tý uzel.

4. Pseudotermální zatížení z kroku 3 je aplikováno na model b a je provedena termální analýza.
5. Souřadnice uzlů obou modelů metody konečných prvků (a a b) jsou obnoveny dle vztahu:

$$[x_n, y_n, z_n]_{i+1}^T = [x_n, y_n, z_n]_i^T + k_2 [u_n, v_n, w_n]_i^T, \quad (4.34)$$

kde i je číslo iterace, $[x_n, y_n, z_n]_i^T$ jsou uzlové souřadnice, $[u_n, v_n, w_n]_i^T$ jsou uzlové posuvy n -tého uzlu i -té iterace, k_2 je příslušné měřítko určené pro daný problém a $[x_n, y_n, z_n]_{i+1}^T$ jsou nové souřadnice pro n -tý uzel.

6. Kroky 2 až 5 se opakují, do chvíle, kdy nastane jednotný stav napětí. (Querín, et al., 2017)

4.2.5 Metoda SKO

Metoda „Soft Kill Option“ se podobně jako metoda CAO inspirovuje přírodními jevy. V případě metody SKO se jedná o inspiraci mineralizace kostí, kdy se elastický modul pružnosti v kostech mění dle namáhání v daném místě. Rozdílem patrným z definice těchto dvou metod je to, že metoda SKO se zabývá celý objemem optimalizované součásti, kdežto CAO metoda se zabývá pouze kritickým místem v součásti se špičkami napětí. (Querín, et al., 2017)

SKO algoritmus:

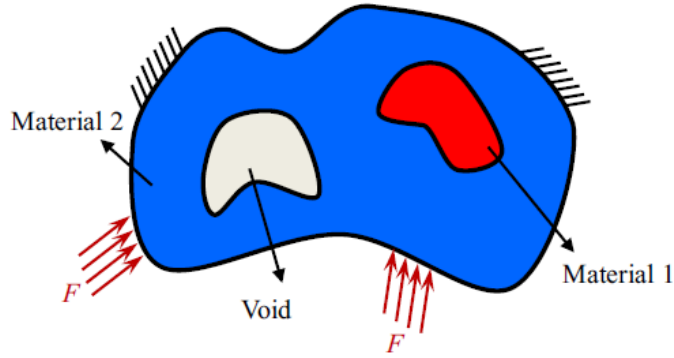
1. Definice návrhového prostoru (sít' konečných prvků), okrajových podmínek, zatížení. Všem elementům sítě konečných prvků je přiřazen stejný modul pružnosti E_{max} .
2. Výpočet rozložení napětí ve struktuře.
3. Rozložení napětí z předchozího kroku je použito k výpočtu modulu pružnosti pro každou další iteraci dle vztahu:

$$E_{i+1}^e = E_i^e + k(\sigma_i^e - \sigma_{ref}), \quad (4.35)$$

kde i je číslo iterace, E_i^e je elastický modul daného elementu, σ_i^e je průměrné napětí e-tého elementu dané iterace, σ_{ref} je globální referenční napětí, k je měřítko (obvykle 1000) a E_{i+1}^e je elastický modul pružnosti e-tého elementu v další iteraci, který musí vyhovovat podmínce: $E_{min} \leq E_{i+1}^e \leq E_{max}$, kde $E_{min} = E_{max}/1000$, E_{max} je maximální dovolený modul pružnosti a odpovídá požadované hodnotě definované struktury v kroku 1.

4. Opakování kroků 2 až 3 až do stavu, kdy je dosaženo jasného rozlišení mezi oblastmi s vysokým a nízkým modulem pružnosti.

5 VÍCEMATERIÁLOVÁ OPTIMALIZACE TOPOLOGIE



Obr. 7: Problém vícemateriálové optimalizace topologie s angl. označením „Material 1“ a „Material 2“ pro jednotlivé materiály bimateriálového modelu, „void“ je označení pro dutinu a „F“ pro vnější zatížení, převzato z (Suo, et al., 2019)

Cílem vícemateriálové optimalizace topologie je najít optimální rozložení dvou a více ($p \geq 2$) odlišných materiálů uvnitř návrhového prostoru Ω . Virtuální materiál („void“) může být považován za separátní fázi v naší formulaci problému OT. Materiálové rozložení je vyjádřeno lokálním objemovým poměrem zavedeným do jednoho vektorového pole α_i ($i = 1, \dots, p$) odpovídající daným fázím, což je ekvivalentní k návrhové proměnné ρ stejně jako při jednomateriálové optimalizaci topologie. Celkový součet objemových poměrů v každém bodě musí být roven 1: (Tavakoli, et al., 2014)

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1 \quad (5.1)$$

Při uvažování více materiálů v optimalizaci topologie pomocí metody SIMP u statické analýzy se původní SIMP metoda pro jeden materiál rozšíří zavedením matice elasticity určitého elementu. Je uvažován model se dvěma materiály a dutinou (viz Obr. 7) dle (Zuo, et al., 2016):

$$\mathbf{E}_e(\rho_e) = \rho_e^p (\rho_e^p \mathbf{E}_e^{*1} + (1 - \rho_e^p) \mathbf{E}_e^{*2}), \quad (5.2)$$

kde $\mathbf{E}_e(\rho_e)$ je vyjádřeno objemovou materiálovou hustotou elementu ρ_e $0 \leq \rho_e \leq 1$, $p (\geq 1)$ je penalizační faktor, $(\mathbf{E}_e)^{*1}$ představuje matici elasticity určitého elementu příslušící materiálu *1, $(\mathbf{E}_e)^{*2}$ je matice elasticity materiálu *2, kdy platí, že $(\mathbf{E}_e)^{*1} > (\mathbf{E}_e)^{*2}$. (Du, et al., 2007), (Zuo, et al., 2016)

Problém pro úlohu minimalizace poddajnosti je poté formulován pomocí následujících rovnic: (Zuo, et al., 2016)

$$\min: c(\rho) = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N \mathbf{E}_e(\rho_e) \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e \quad (5.3)$$

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_e(\rho_e) \quad (5.4)$$

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^N V_e \rho_e, \quad (5.6)$$

kde c je poddajnost, \mathbf{U} je globální vektor posunutí, \mathbf{F} je globální vektor síly, \mathbf{K} je globální matice tuhosti, \mathbf{u}_e je vektor posuvu elementu, \mathbf{k}_0 je matice tuhosti elementu, ρ_e je návrhová proměnná, N je počet elementů, \mathbf{M} je hmotnost celého návrhového prostoru, V_e je objem e-tého prvku.

Pro úlohu OT s cílem maximalizace vlastní frekvence je problém formulován následovně:

$$\max_{\rho_1, \dots, \rho_{N_E}} \left\{ \min_{j=1, \dots, J} \left\{ \omega_j^2 \right\} \right\} \quad (5.7)$$

za podmíněk:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_j = \omega_j^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_j, \quad (j = 1, \dots, J), \quad (5.8)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_k = \delta_{jk}, \quad (j \geq k; k, j = 1, \dots, J), \quad (5.9)$$

$$\sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq \bar{V}_s, \quad (\bar{V}_s = \alpha V_0), \quad (5.10)$$

$$0 < \underline{\rho} \leq \rho_e \leq 1, \quad (e = 1, \dots, N_E), \quad (5.11)$$

kde ω_j je j -tá vlastní frekvence, $\boldsymbol{\varphi}_j$ je příslušný vlastní vektor, \mathbf{K} je globální matice tuhosti, \mathbf{M} je globální matice hmotnosti, J vyhovuje podmínce $0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_J$ za předpokladu, že příslušné vlastní vektory jsou orthonormální, δ_{jk} je Kroneckerovo delta, ρ_e pro $e = 1 \dots N_E$ je návrhová proměnná představující objemové materiálové hustoty materiálu a poslední rovnice (5.11) představuje dolní a horní hranici návrhové proměnné. Za účelem zabránění singularity je $\underline{\rho}$ definováno jako malé kladné číslo ($\underline{\rho} = 10^{-3}$), α je objemový poměr. (Du, et al., 2007), (Du, et al., 2005)

Rozdílem u vícemateriálové OT s cílem maximalizace vlastní frekvence oproti OT s cílem minimalizace poddajnosti je zavedení matice elasticity elementu pro model skládající se pouze ze dvou materiálů ve tvaru: (Bendsoe, et al., 1999), (Zuo, et al., 2016)

$$\mathbf{E}_e(\rho_e) = \rho_e^p (\mathbf{E}_e)^{*1} + (1 - \rho_e^p) (\mathbf{E}_e)^{*2}, \quad (5.12)$$

kde $E_e(\rho_e)$ je vyjádřeno pomocí objemové materiálové hustoty elementu ρ_e $0 \leq x \leq 1$, p (≥ 1) je penalizační faktor, $(E_e)^{*1}$ představuje matici elasticity určitého elementu příslušící materiálu *1, $(E_e)^{*2}$ pro materiál *2, kdy platí, že $(E_e)^{*1} > (E_e)^{*2}$. (Du, et al., 2007)

Dále je také potřeba pro případ dynamické úlohy zavést matici hmotnosti daného elementu ve tvaru: (Du, et al., 2007)

$$\mathbf{M}_e(\rho_e) = \rho_e(\mathbf{M}_e)^{*1} + (1 - \rho_e)(\mathbf{M}_e)^{*2} \quad (5.13)$$

Problém vícemateriálové optimalizace topologie je v této diplomové práci rozdělen na sérii binárních sub-problémů OT, které jsou řešeny po částech. Z fyzikálního hlediska je nejdůležitějším aspektem vícemateriálové OT zavedení tenzorů materiálových vlastností jako funkci lokálních objemových poměrů a fyzikálních vlastností jednotlivých fází (materiálů). (Tavakoli, et al., 2014)

5.1 Algoritmus se střídající aktivní fází

Pro řešení vícemateriálové OT byl použit algoritmus se střídající aktivní fází („*Alternating active phase algorithm*“) dle (Tavakoli, et al., 2014). V porovnání s ostatními publikovanými algoritmy k řešení binární fázové OT umožňuje tento algoritmus jen s mírnou úpravou možnost řešení vícefázové (vícemateriálové) OT a je vyvinut co nejobecněji, aby jej bylo možné použít na co největší spektrum úloh OT.

Tento algoritmus obsahuje vnější a vnitřní iterační cyklus, kdy vnější iterační cyklus, ve kterém je $p(p-1)/2$ binárních fázových subproblémů OT řešeno po částech (nekompletně). Při řešení každého subproblému jsou topologie odpovídající $p-2$ fázím zafixovány posledním známým hodnotám a ostatní dvě (aktivní) fáze jsou variovány. Subskripty jsou označovány jako a a b a přísluší jim návrhové vektory, které mohou být variovány s označením α_a^h , α_b^h a α_i^h je fixovaná pro $i \neq \{a, b\}$. (Tavakoli, et al., 2014)

U binárního fázového algoritmu OT odpovídajícího určitému sub-problému je přípustný návrhový prostor, ve kterém jsou topologie fází a a b variovány, definován jako:

$$\mathcal{A}_{ab}^h := \{ \alpha_a^h \in \mathcal{V}^h(\Omega^h) \mid l_a^h \leq \alpha_a^h \leq u_{a,temp}^h, \int_{\Omega^h} \alpha_a^h dx = \Lambda_a |\Omega^h| \} \quad (5.14)$$

kde $\mathcal{V}^h(\Omega^h)$ definuje návrhový prostor, l_a^h a $u_{a,temp}^h$ představují dolní a horní mez fáze a (a – „*active phase*“, fáze b je uvažována jako fáze pozadí – „*background phase*“).

$$r_{ab}^h = 1^h - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \{a,b\}}}^p \alpha_i^h \quad (5.15)$$

kde r_{ab}^h je zbývající objemový poměr, který je variován při každé fázi optimalizace. Fáze a je brána jako návrhová proměnná sub-problému optimalizace topologie a poté je objemový poměr pro fázi b vypočítán dle vztahu:

$$\alpha_b^h = r_{ab}^h - \alpha_a^h \quad (5.16)$$

Vzhledem k výše uvedenému je horní mez fáze a $u_{a,temp}^h$ třeba definovat dle vztahu (5.17), dolní mez zůstane beze změny:

$$u_{a,temp}^h = \min(u_a^h, r_{ab}^h) \quad (5.17)$$

6 PŘEHLED PUBLIKOVANÝCH ALGORITMŮ OPTIMALIZACE TOPOLOGIE

V následující tabulce *Tab. 1* je vypsán výčet publikovaných algoritmů k roku 2016 pro optimalizaci topologie s uvedením roku publikace, programovacího jazyku, počtu řádků, metody OT a problémové situace pro kterou je algoritmus určen. (Wei, et al., 2018)

Tab. 1: Přehled publikovaných algoritmů OT

Rok	Autor	Jazyk	Počet řádků	Metoda OT	Poznámky
2001	Sigmund	<i>MATLAB</i>	99	SIMP	Minimalizace poddajnosti
2003	Bendsøe, Sigmund	<i>MATLAB</i>	105	SIMP	Návrh vyhovujícího mechanismu
2003	Bendsøe, Sigmund	<i>MATLAB</i>	91	SIMP	Problém vedení tepla
2004	Wang et al.	<i>MATLAB</i>	199	Level set method	Minimalizace poddajnosti
2004	Kharmanda et. al.	<i>MATLAB</i>	71	SIMP	Spolehlivost vazeb
2006	Olesen et al.	<i>MATLAB</i>	111	Density based method	Ustálený stav Navier Stokesova proudění
2009	Allaire	<i>Scilab</i>	-	Level set method	Minimalizace poddajnosti
2010	Huang a Xie	<i>MATLAB</i>	101	BESO	Minimalizace poddajnosti
2010	Suresh	<i>MATLAB</i>	199	SIMP	Paretovo optimální trasování
2010	Challis	<i>MATLAB</i>	129	Level set method	Minimalizace poddajnosti
2011	Andreassen et al.	<i>MATLAB</i>	88	SIMP	Rozšíření Sigmundova 99-řádkového algoritmu
2011	Schmidt a Schulz	<i>C/C++</i>	2589	SIMP	GPU zrychlení
2012	Talischi et al.	<i>MATLAB</i>	190	SIMP	Izoparametrické mnohoúhelníkové prvky
2012	Zhou et al.	<i>MATLAB</i>	99	BESO	Dvoufázové buněčné materiály s žádocími transportními vlastnostmi
2014	Liu a Tovar	<i>MATLAB</i>	169	SIMP	Minimalizace poddajnosti v 3D prostoru
2014	Otomori	<i>MATLAB</i>	88	Level set method	Rovnice reakční difuze
2014	Tavakoli a Mohseni	<i>MATLAB</i>	115	Alternating active-phase algorithm	Vícemateriálová OT
2015	Emre a To	<i>MATLAB</i>	90	PTO	Proporční OT
2015	Xia a Breitkopf	<i>MATLAB</i>	119	Homogenization method	Návrh materiálů s extrémními vlastnostmi
2015	Zegard a Paulino	<i>MATLAB</i>	-	Ground structure	Prutová optimalizace pro libovolné 3D struktury
2015	Zuo a Xie	<i>Python</i>	100	BESO	Skriptovací prostředí <i>Abaqus</i>
2016	Zhang et al.	<i>MATLAB</i>	188	MMC	Metoda pohybujících se komponenty měnící tvar

7 METODA KONEČNÝCH PRVKŮ

Za účelem zjištění posuvů pro statickou úlohu, respektive vlastních hodnot a vektorů pro dynamickou úlohu, byla využita metoda konečných prvků (MKP). Jedná se o variační numerickou metodu, která vychází z Lagrangeova variačního principu, který zní následovně:

„Mezi všemi funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují geometrické okrajové podmínky, se realizují ty, které udělají celkové potenciální energii Π stacionární hodnotu.“ (Petruška, nedatováno)

$$\Pi = W - P, \quad (7.1)$$

kde W je energie napjatosti tělesa Ω ,

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \varepsilon dV \quad (7.2)$$

a P je potenciál vnějšího zatížení

$$P = \int_{\Omega} u^T o dV + \int_{\Gamma_p} u^T p dS. \quad (7.3)$$

Při řešení statické úlohy se vychází ze základní rovnice metody konečných prvků, která je odvozena právě z Lagrangeova variačního principu:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (7.4)$$

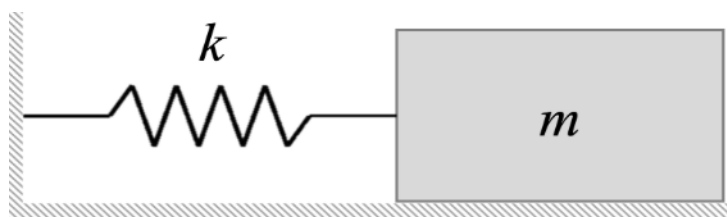
kde \mathbf{K} je matice tuhosti, \mathbf{U} je matice posuvů a \mathbf{F} je matice vnějšího zatížení.

V případě řešení OT u statické úlohy je neznámou matice posuvů, která se dá vypočítat podle vztahu: (Petruška, nedatováno)

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F} \quad (7.5)$$

Při řešení modální analýzy se vychází ze vztahu pro netlumené kmitání systému s jedním stupněm volnosti: (Bilošová, 2012)

$$\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} = 0 \quad (7.6)$$

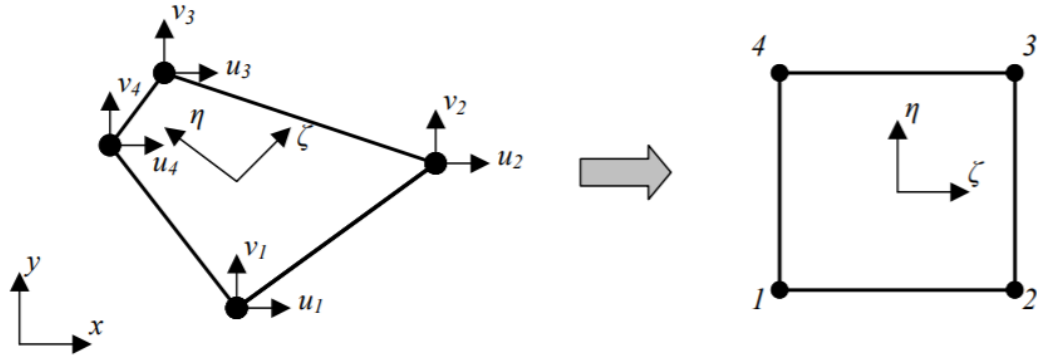


Obr. 8: Systém s jedním stupněm volnosti skládající se z pružiny k a hmoty m , převzato z (Bilošová, 2012)

Při řešení OT s cílem maximalizace vlastní frekvence je neznámou vlastní frekvence ω , kterou lze určit ze vztahu:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (7.7)$$

Pro všechny naprogramované úlohy byl použit čtyřúhelníkový bilineární prvek se 2 stupni volnosti v každém uzlu (u, v), viz Obr. 9.



Obr. 9: Bilineární čtyřúhelníkový prvek v kartézském a přirozeném souřadném systému, převzato z (Petrůška, nedatováno)

Jedná se o rovinný čtyřúhelníkový prvek, který je vhodný pro řešení 2D úloh. Má celkově 8 deformačních parametrů, díky nimž není řešení problému optimalizace topologie tak výpočetně náročné, jako by mohlo být u víceuzlových prvků.

Pro čtyřuzlový bilineární prvek s označením v programu ANSYS PLANE42 nebo PLANE182 byla elementární matice tuhosti \mathbf{K}_e o velikosti 8 x 8 definována následovně:

$$\mathbf{K}_e = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\mu}{6} & \frac{1}{8} + \frac{\mu}{8} & -\frac{1}{4} - \frac{\mu}{12} & -\frac{1}{8} + \frac{3\mu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\mu}{12} & -\frac{1}{8} - \frac{\mu}{8} & \frac{\mu}{6} & \frac{1}{8} - \frac{3\mu}{8} \\ \frac{1}{8} + \frac{\mu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\mu}{6} & \frac{1}{8} - \frac{3\mu}{8} & \frac{\mu}{6} & -\frac{1}{8} - \frac{\mu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\mu}{12} & -\frac{1}{8} + \frac{3\mu}{8} & -\frac{1}{4} - \frac{\mu}{12} \\ -\frac{1}{4} - \frac{\mu}{12} & \frac{1}{8} - \frac{3\mu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\mu}{6} & -\frac{1}{8} - \frac{\mu}{8} & \frac{\mu}{6} & -\frac{1}{8} + \frac{3\mu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\mu}{12} & \frac{1}{8} + \frac{\mu}{8} \\ -\frac{1}{8} + \frac{3\mu}{8} & \frac{\mu}{6} & -\frac{1}{8} - \frac{\mu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\mu}{6} & \frac{1}{8} - \frac{3\mu}{8} & -\frac{1}{4} - \frac{\mu}{12} & \frac{1}{8} + \frac{\mu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\mu}{12} \\ -\frac{1}{4} + \frac{\mu}{12} & -\frac{1}{8} - \frac{\mu}{8} & \frac{\mu}{6} & \frac{1}{8} - \frac{3\mu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\mu}{6} & \frac{1}{8} + \frac{\mu}{8} & -\frac{1}{4} - \frac{\mu}{12} & -\frac{1}{8} + \frac{3\mu}{8} \\ -\frac{1}{8} - \frac{\mu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\mu}{12} & -\frac{1}{8} + \frac{3\mu}{8} & -\frac{1}{4} - \frac{\mu}{12} & \frac{1}{8} + \frac{\mu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\mu}{6} & \frac{1}{8} - \frac{3\mu}{8} & \frac{\mu}{6} \\ \frac{\mu}{6} & -\frac{1}{8} + \frac{3\mu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\mu}{12} & \frac{1}{8} + \frac{\mu}{8} & -\frac{1}{4} - \frac{\mu}{12} & \frac{1}{8} - \frac{3\mu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\mu}{6} & -\frac{1}{8} - \frac{\mu}{8} \\ \frac{1}{8} - \frac{3\mu}{8} & -\frac{1}{4} - \frac{\mu}{12} & \frac{1}{8} + \frac{\mu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\mu}{12} & -\frac{1}{8} + \frac{3\mu}{8} & \frac{\mu}{6} & -\frac{1}{8} - \frac{\mu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\mu}{6} \end{pmatrix}$$

Pro dynamické úlohy OT bylo třeba kromě matice \mathbf{K}_e také zapsat elementární matici hmotnosti \mathbf{M}_e o stejné velikosti 8x8, která má pro čtyřuzlový bilineární prvek tvar:

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho}{36} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Pro výpočet je kromě elementární matice tuhosti \mathbf{K}_e případně hmotnosti \mathbf{M}_e potřeba sestavit globální matici tuhosti \mathbf{K} a hmotnosti \mathbf{M} . Ty je možné sestavit po zapsání příslušných prvků, propojujících uzly i a j , elementární matice tuhosti \mathbf{K}_e či hmotnosti \mathbf{M}_e na příslušné pozice dle:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1(2i-1)} & k_{1(2i)} & \dots & k_{1(2j-1)} & k_{1(2j)} & \dots & k_{1(2n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(2i-1)1} & \dots & k_{(2i-1)(2i-1)} & k_{(2i-1)(2i)} & \dots & k_{(2i-1)(2j-1)} & k_{(2i-1)(2j)} & \dots & k_{(2i-1)(2n)} \\ k_{(2i)1} & \dots & k_{(2i)(2i-1)} & k_{(2i)k_{(2i)}} & \dots & k_{(2i)(2j-1)} & k_{(2i)k_{(2j)}} & \dots & k_{(2i)k_{(2n)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(2j-1)1} & \dots & k_{(2j-1)(2i-1)} & k_{(2j-1)(2i)} & \dots & k_{(2j-1)(2j-1)} & k_{(2j-1)(2j)} & \dots & k_{(2j-1)(2n)} \\ k_{(2j)1} & \dots & k_{(2j)(2i-1)} & k_{(2j)k_{(2i)}} & \dots & k_{(2j)(2j-1)} & k_{(2j)k_{(2j)}} & \dots & k_{(2j)k_{(2n)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & k_{(2n)k_{(2n)}} \end{pmatrix}$$

s číselným označením prvků matice tuhosti \mathbf{K}_e :

$$\mathbf{K}_e = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{pmatrix}$$

Pro nastínění charakteru číslování jednotlivých prvků elementárních matic a z nich sestavených globálních matic je uvedena jako příklad matice tuhosti, nicméně totožně tomu je u matice hmotnosti. Globální matice tuhosti \mathbf{K} či hmotnosti \mathbf{M} má rozměr $2n \times 2n$, kde n je počet uzlů.

Globální matice tuhosti \mathbf{K} či hmotnosti \mathbf{M} je ale singulární (tj. determinant matice je nulový) a soustava nemá jednoznačné řešení. To je však v souladu s tím, že doposud nebyly předepsány okrajové podmínky. Pro deformační variantu MKP ve statických úlohách platí, že:

„Řešitel musí vždy předepsat alespoň takové okrajové podmínky, aby zamezil pohybu tělesa jako celku ve všech jeho složkách, které jsou možné s ohledem na typ a dimenzi úlohy.“ (Petruška, nedatováno)

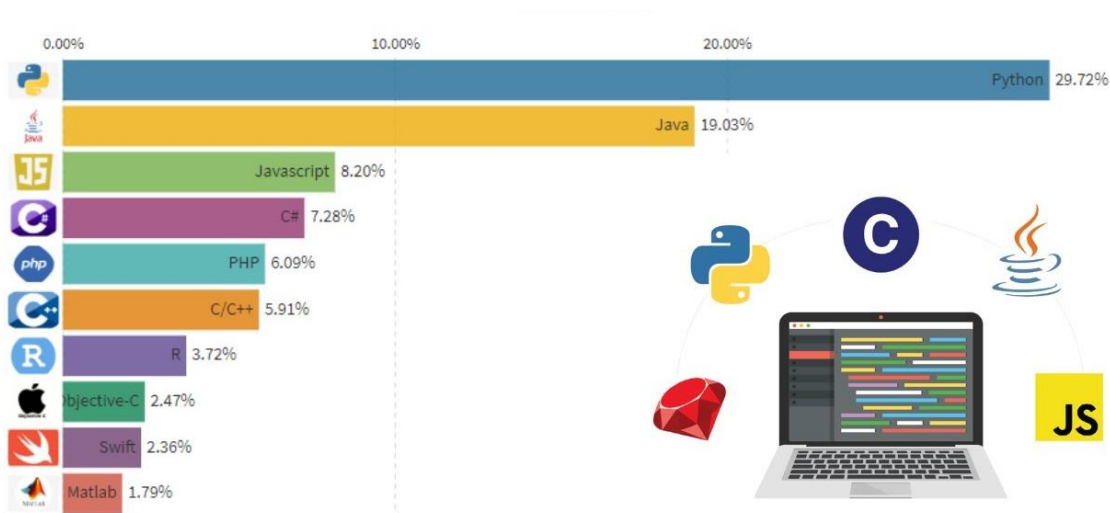
Nesplnění této podmínky vede k singularitě a ke zhroucení numerického výpočtu. V řešených úlohách je tedy potřeba zadat volné a odebrané stupně volnosti a následně prvky z matic \mathbf{K} a \mathbf{M} , pro které jsou stupně volnosti odebrány, odstranit. (Petruška, nedatováno)

8 PYTHON

Předmětem zadání diplomové práce bylo vytvoření výpočetního programu v programovacím prostředí ANSYS, případně Matlab, nebo Python. Python je v praxi velmi populární volně dostupný programovací jazyk využitelný pro širokou sféru aplikací napříč obory. Také z těchto důvodů byl Python 3 zvolen pro naprogramování algoritmů OT.

„Python je vysoce výkonný skriptovací programovací jazyk používající efektivní vysokoúrovňové datové typy, přičemž jednoduše a elegantně řeší otázku objektivě orientovaného programování.“ (Švec, 2002)

Dle následujícího Obr. 10 je možné vidět, že Python je v roce 2020 nejvyužívanějším programovacím jazykem dle indexu PYPL („Popularity of Programming Language Index“).



Obr. 10: Oblíbenost programovacích jazyků v roce 2020, převzato z (PYPL, 2020)

NumPy

NumPy („Numerical Python“) je matematickou knihovnou sloužící k numerickému modelování v Pythonu. Zahrnuje podporu pro velké vícerozměrné datové typy (řady a matice) s velkým souborem různých matematických funkcí usnadňujících matematické operace obsažené v algoritmu. Knihovna NumPy je volně dostupná z webové stránky www.numpy.org.

SciPy

Stejně jako NumPy je SciPy volně dostupnou knihovnou. Název SciPy je odvozen z jeho využití pro vědecké výpočty (z angl. „Scientific computing tools for Python“). Pro řešení úloh optimalizace topologie bylo z knihovny využito příkazů umožňující výpočty lineární algebry, zápis řídkých matic anebo výpočet vlastních čísel a vektorů. Knihovna SciPy je volně dostupná z webové stránky www.scipy.org.

Matplotlib

Matplotlib je volně dostupnou knihovnou *Pythonu* sloužící k 2D vykreslování dat. Slouží jak ke generování jednoduchých grafů, tak také histogramů nebo bitmap. Knihovna *Matplotlib* je volně dostupná z www.matplotlib.org.

9 OPTIMALIZACE TOPOLOGIE NOSNÍKU

V následující části diplomové práce bude pojednáno o výsledcích a algoritmech použitých pro OT nosníku zatíženého staticky nebo dynamicky, složeného z jednoho, či více materiálů. Všechny úlohy byly řešeny ve dvourozměrném prostoru. Všechny výpočty byly provedeny na zařízení s pamětí RAM 8 GB a procesorem Intel Core i5-5200U CPU s frekvencí 2,2 GHz.

Vzhledem ke stanoveným cílům diplomové práce byly navrženy čtyři problémové situace:

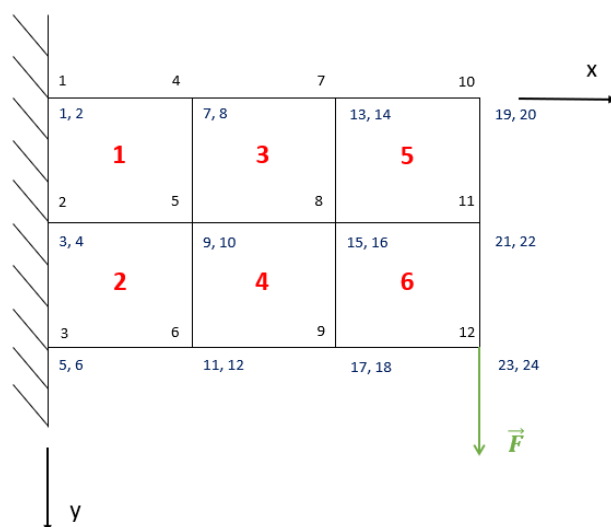
- **Problém 1:** jednomateriálová optimalizace topologie s cílem minimalizace poddajnosti
- **Problém 2:** jednomateriálová optimalizace topologie s cílem maximalizace vlastní frekvence
- **Problém 3:** vícemateriálová optimalizace topologie s cílem minimalizace poddajnosti
- **Problém 4:** vícemateriálová optimalizace topologie s cílem maximalizace vlastní frekvence

Zejména z hlediska všestrannosti a využitelnosti pro OT dle navržených problémových situací byla vybrána modifikovaná metoda SIMP se zavedením modulu pružnosti pro virtuální materiál E_{min} . Algoritmy byly naprogramovány pomocí jazyku *Python 3*.

9.1 Metoda konečných prvků

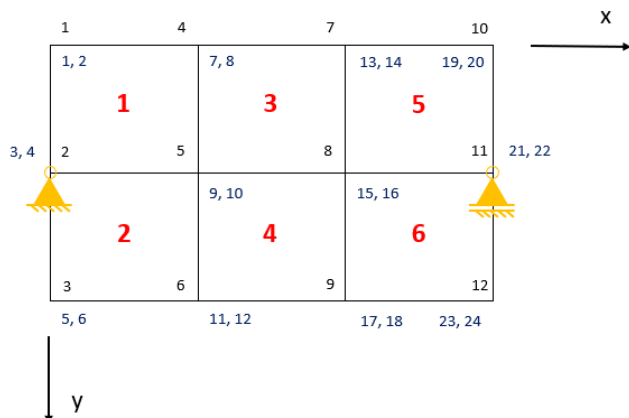
Jednotlivé problémové situace včetně okrajových podmínek jsou ilustrovány na následujících obrázcích *Obr. 11* a *Obr. 12*. Pro ilustraci byla využita výchozí síť konečných prvků o rozměrech 3 x 2 elementy. V obrázku je naznačen také smysl číslování elementů, uzlů a stupňů volnosti, který je pro každou problémovou situaci navrhnut stejným způsobem, a to ve směru osy y a po dosažení hodnoty $y=nely$ následným posuvem o jeden element ve směru osy x .

Pro statickou úlohu byly okrajovými podmínkami vetknutí všech uzlů na levém konci ($x = 0$) a síla F umístěná v pravém dolním uzlu ve směru osy y . Na následujícím *Obr. 11* je zobrazena výchozí konečnoprvková síť, která je složena ze 3 x 2 elementů, 12 uzlů a 24 stupňů volnosti. Samotná optimalizace topologie byla provedena na větších návrhových prostorech o rozdílných velikostech.



Obr. 11: Konečnoprvková síť pro řešení problému 1 a 3, červeně – elementy, černě – uzly, modře – stupně volnosti, zeleně – síla F , vlastní zpracování

Pro úlohu modální analýzy byly okrajovými podmínkami rotační vazba v prostředním uzlu na levé hraně návrhového prostoru ($x = 0$) a podepření v prostředním uzlu na pravé hraně návrhového prostoru ($x = nel_x$, kde nel_x je počet prvků ve směru osy x).



Obr. 12: Konečnoprvková síť pro řešení problému 2 a 4, červeně – elementy, černě – uzly, modře – stupně volnosti, vlastní zpracování

Jak je zmíněno výše pro každou úlohu bylo jako součást funkce *FEM* počítající metodu konečných prvků (skript *FEMM.py*) třeba předepsat jednotlivé charakteristiky sítě konečných prvků – čísla uzlů (ve skriptu proměnná ozn. jako *nodeids*), stupňů volnosti (všech – *alldofs*, volných – *freedofs* a odebraných – *fixeddofs*) a elementů. Pro potřebný maticový zápis stupňů volnosti příslušících jednotlivým elementům byla ve skriptu definována matice *edofMat* s následujícím tvarem pro výchozí síť konečných prvků o rozměrech 3 x 2 elementy:

$$edofMat = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 19 & 20 & 21 & 22 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Element 1} \\ \text{Element 2} \\ \text{Element 3} \\ \text{Element 4} \\ \text{Element 5} \\ \text{Element 6} \end{matrix}$$

Dalším krokem v metodě konečných prvků bylo sestavení globální matice tuhosti a hmotnosti v případě dynamické úlohy dle vztahů:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_E} \rho_e^p \mathbf{K}_e \quad (9.1)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{N_E} \rho_e^p \mathbf{M}_e \quad (9.2)$$

Pro řešení rovnice statické strukturální úlohy

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (9.3)$$

byla využita funkce *spsolve* z knihovny *Pythonu SciPy*. Výstupním parametrem je matice posuvů jednotlivých stupňů volnosti.

Pro řešení rovnice modální analýzy

$$\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} = 0 \quad (9.4)$$

byla využita funkce *eigs* také z knihovny *SciPy*. Výstupními parametry je vektor vlastních čísel (vlastních frekvencí) a matice vlastních vektorů.

Problém OT může být řešen několika přístupy jako například metodami optimálního kritéria (OC – „*Optimality Criteria*“), sekvenčním lineárním programováním (SLP – „*Sequential Linear Programming*“) nebo metodou pohybujících se asymptot (MMA – „*Method of Moving Asymptotes*“, viz (Svanberg, 1987)). Pro řešení dané problémové situace byla zvolena první z metod – metoda OC.

9.2 Metoda optimálního kritéria

Metodou optimálního (hodnotícího) kritéria, která je použita pro řešení problémové situace je standartní metoda optimálního kritéria dle (Bendsoe, 1995). Formulována je následovně:

$$\rho_e^{nová} = \begin{cases} \max(0, \rho_e - m) & \text{pokud } \rho_e B_e^\eta \leq \max(0, \rho_e - m) \\ \min(1, \rho_e + m) & \text{pokud } \rho_e B_e^\eta \leq \min(1, \rho_e - m) \\ \rho_e B_e^\eta & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde m je limit změny návrhové proměnné, η je numerický koeficient tlumení, a B_e je získáno z podmínky optimality jako:

$$B_e = \frac{-\frac{\partial c}{\partial \rho_e}}{\lambda \frac{\partial V}{\partial \rho_e}}, \quad (9.5)$$

kde λ je Lagrangeův multiplikátor.

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -p(\rho_e)^{p-1} u_e^T \mathbf{k}_0 u_e \quad (9.6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_e} = 1, \quad (9.7)$$

kde V je celkový objem materiálu.

Hodnotící (optimální) kritérium v případě maximalizace určité vlastní hodnoty $\lambda_j = \omega_j^2$ daného řádu $j = 1, 2 \dots N_e$ vychází z metody Lagrangeových multiplikátorů:

$$(\lambda_j)'_{\rho_e} - \gamma_0 V_e = 0, \quad e = 1, \dots N_e, \quad (9.8)$$

kde $(\lambda_j)'_{\rho_e}$ je citlivostí vlastní hodnoty vzhledem k návrhové proměnné, $\gamma_0 (\geq 0)$ je Lagrangeův multiplikátor a V_e je objem určitého elementu. (Du, et al., 2005), (Du, et al., 2007)

$$(\lambda_j)'_{\rho_e} = \phi_j^T (K'_{\rho_e} - \lambda_j M'_{\rho_e}) \phi_j \quad (9.9)$$

Hodnotící kritérium je založeno na metodě bisekce, kdy interval, v kterém se hledá optimální řešení je ohraničen dolní a horní mezí Lagrangeova multiplikátoru (λ^l, λ^u), kdy platí, že $\lambda \geq 0$. λ^l tedy může být rovno nule a horní mez λ^u je parametr závislý na řešeném problému. (Zuo, et al., 2016) Například pro úlohu vícemateriálové optimalizace s cílem minimalizace poddajnosti nebo maximalizace vlastní frekvence struktury byla jeho hodnota λ^u rovna 10^9 , u úloh jednomateriálové optimalizace topologie byla stanovena jeho hodnota na 10^6 . Vhodně zvolenou hodnotou tohoto parametru se dá docílit zrychlení celkového času výpočtu, ale naopak nevhodně zvolenou hodnotou se také dá zapříčinit divergenci.

Celá funkce pro metodu optimálního kritéria má pak následující tvar:

Metoda optimálního kritéria	
1	Stanovení λ^l, λ^u, m
2	alokace $\rho_e^{nová}$
	while cyklus
3	while $\lambda^l - \lambda^u > 1 \cdot 10^{-9}$
4	$\lambda = 0,5 \cdot (\lambda^l + \lambda^u)$
5	stanovení $\rho_e^{nová}$
	if podmínka
6	if $\sum \rho_e^{nová} - \rho_e > 0$
7	$\lambda^l = \lambda$
8	if $\sum \rho_e^{nová} - \rho_e \leq 0$
9	$\lambda^u = \lambda$

9.3 Filtrace a citlivostní analýza

Pro filtraci u statické úlohy byl využit citlivostní filtr dle (Sigmund, 1997). Účelem zavedení filtru do výpočtu je zajištění nezávislosti sítě. Filtr má fixní geometrický rozměr definovaný pomocí rádia r_f , což znamená, že modifikace elementu je závislá na elementech ležících uvnitř daného rozsahu r_f . Filtr nezávislosti sítě je definován pomocí následujícího vztahu, dle nějž dochází k modifikaci citlivostí elementů:

$$\frac{\widehat{\partial c}}{\partial \rho_e} = \frac{1}{\max(\gamma, \rho_e) \sum_{i \in N_e} H_{ei}} \sum_{i \in N_e} H_{ei} \rho_i \frac{\partial c}{\partial \rho_i}, \quad (9.10)$$

kde γ je konstanta, která je zavedena, aby bylo zabráněno dělení nulou $\gamma = 10^{-3}$, N_e je set elementů i , pro které je vzdálenost $\Delta(e, i)$ ke středu elementu e menší než r_f , H_{ei} je váhový faktor definovaný jako:

$$H_{ei} = \max(0, r_f - \Delta(e, i)) \quad (9.11)$$

Pro filtraci u dynamické úlohy byl využit tentýž filtr jako při řešení problému 1. Rozdílná a charakteristická pro řešení této problémové situace je citlivostní analýza, kdy jejím cílem je minimalizace hmotnosti a maximalizace tuhosti a řídí se rovnicí:

$$(\lambda_j)_{\rho_e}' = \phi_j^T (\mathbf{K}_{\rho_e}' - \lambda_j \mathbf{M}_{\rho_e}') \phi_j \quad (9.12)$$

kde platí, že:

$$\mathbf{K}_{\rho_e}' = (p^K \rho_e^{p^K-1}) \mathbf{K}_e \quad (9.13)$$

$$\mathbf{M}_{\rho_e}' = (p^M \rho_e^{p^M-1}) \mathbf{M}_e \quad (9.14)$$

$(\lambda_j)'_{\rho_e}$ je citlivost, ϕ_j je příslušný vlastní vektor, \mathbf{K}'_{ρ_e} je citlivost tuhosti, \mathbf{M}'_{ρ_e} je citlivost hmotnosti, p^K a p^M jsou penalizační faktory pro tuhost a hmotnost, ρ_e je návrhová proměnná, \mathbf{K}_e a \mathbf{M}_e jsou elementární matice tuhosti a hmotnosti. (Du, et al., 2005), (Du, et al., 2007)

9.4 Problém 1: Jednomateriálová optimalizace topologie s cílem minimalizace poddajnosti

Pro úlohu OT s cílem minimalizace poddajnosti byly naprogramovány celkem 4 skripty. Hlavní skript, který sloužil ke spuštění celého algoritmu, nese název `__init__.py`. Ten si pak postupně během iteračního cyklu spouští skripty `filterr.py`, `FEMM.py` a `OC.py`.

Algoritmus řešení OT s cílem minimalizace poddajnosti

Zadání vstupních parametrů

1 $nel_x, nel_y, v_f, r_f, p, E_{min}, E_{max}, \mu$

Filtrace

2 $(H, H_s) = \text{filter}(nel_x, nel_y, r_f)$

Alokace návrhové proměnné a dalších potřebných proměnných

3 Alokace ρ_e

Inicializace iteračního cyklu

4 $iter = 0; change = 1$

Iterační cyklus

5 **while** $change > 0.01 \wedge iter < 200$

6 $iter = iter + 1$

7 metoda konečných prvků $U = \mathbf{FEM}(nel_x, nel_y, \rho_e, p, E_{min}, E_{max})$

8 citlivostní analýza – výpočet $c, \frac{\partial c}{\partial \rho_e}$

9 citlivostní filtrace $\frac{\partial c}{\partial \rho_e}$

10 $\rho_{eold} = \rho_e$

11 hodnotící kritérium $\rho_e = \mathbf{OC}(nel_x, nel_y, \rho_e, \frac{\partial c}{\partial \rho_e})$

12 výpočet změny konvergence $change = \rho_e - \rho_{eold}$

13 vykreslení optimalizovaného tvaru, grafů konvergence návrhové proměnné a minimalizace poddajnosti

9.4.1 Volba vstupních parametrů:

Výchozí vstupní parametry do výpočtu u problému 1 jsou uvedeny v *Tab. 2*:

Tab. 2: Výchozí vstupní parametry pro Problém 1

Modul pružnosti reálného materiálu E_{max} [MPa]	1
Modul pružnosti virtuálního materiálu E_{min} [MPa]	$1 \cdot 10^{-9}$
Poissonův poměr μ [-]	0,3
Objemový poměr v_f [-]	0,5
Radius filtru r_f	3
Penalizační faktor p	3

9.4.2 Výsledky optimalizace topologie:

Jednomateriálová optimalizace topologie s cílem minimalizace poddajnosti byla řešena na celkem třech různých návrhových prostorech o počtu elementů v ose x (nel_x) a v ose y (nel_y):

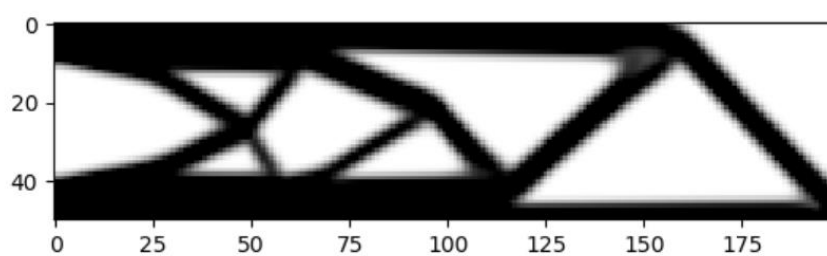
- $\Omega \#1$: $nel_x = 200, nel_y = 50$
- $\Omega \#2$: $nel_x = 220, nel_y = 60$
- $\Omega \#3$: $nel_x = 210, nel_y = 40$

Rozměry návrhového prostoru byly voleny s ohledem na typický tvar modelu geometrie vetknutého nosníku v praktických aplikacích. Zároveň byly rozměry voleny s ohledem na zachování přibližně stejného celkového počtu prvků. V následující *Tab. 3* jsou pro jednotlivé návrhové prostory uvedeny původní hodnoty poddajnosti c_0 , výsledné hodnoty poddajnosti po optimalizaci topologie c_f . V *Tab. 3* je také uveden rozdíl v hodnotách poddajnosti Δc mezi původní a finální hodnotou, doba výpočtu t a počet iterací. Pro všechny úlohy jednomateriálové OT s cílem minimalizace poddajnosti byla hodnota numerického koeficientu tlumení η rovna 0,5.

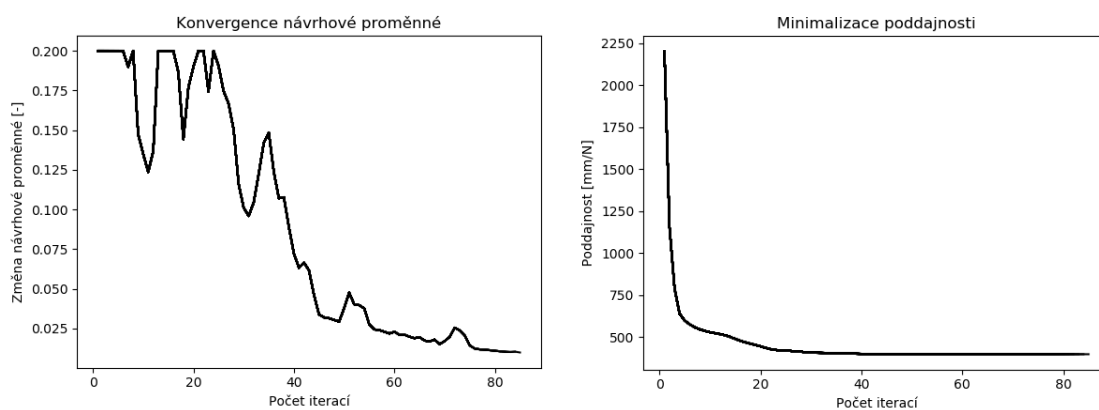
Tab. 3: Výsledné hodnoty OT s cílem minimalizace poddajnosti

Návrhový prostor	nel_x	nel_y	c_0 [mm/N]	c_f [mm/N]	Δc [%]	t [s]	počet iterací
$\Omega \#1$	200	50	2204	399	-81,9	234	85
$\Omega \#2$	220	60	1730	314	-81,9	670	156
$\Omega \#3$	210	40	4806	838	-82,6	330	122

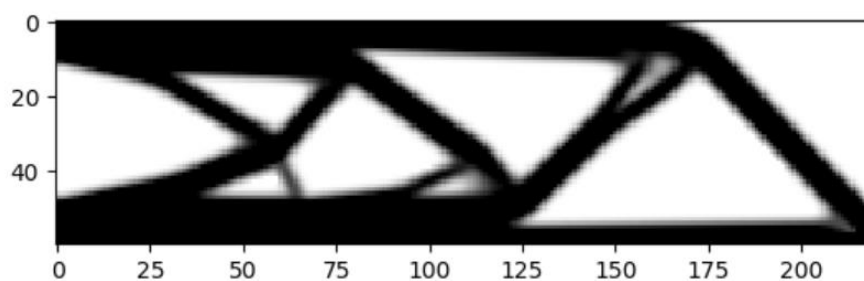
V následujících obrázcích *Obr. 13* až *Obr. 15* jsou vykresleny optimalizované tvary pro jednotlivé návrhové prostory $\Omega \#1$ až $\Omega \#3$. Pro OT s cílem minimalizace poddajnosti každého z návrhových prostorů byla také na grafech *Graf 1* až *Graf 3* vykreslena konvergence návrhové proměnné a minimalizace poddajnosti.



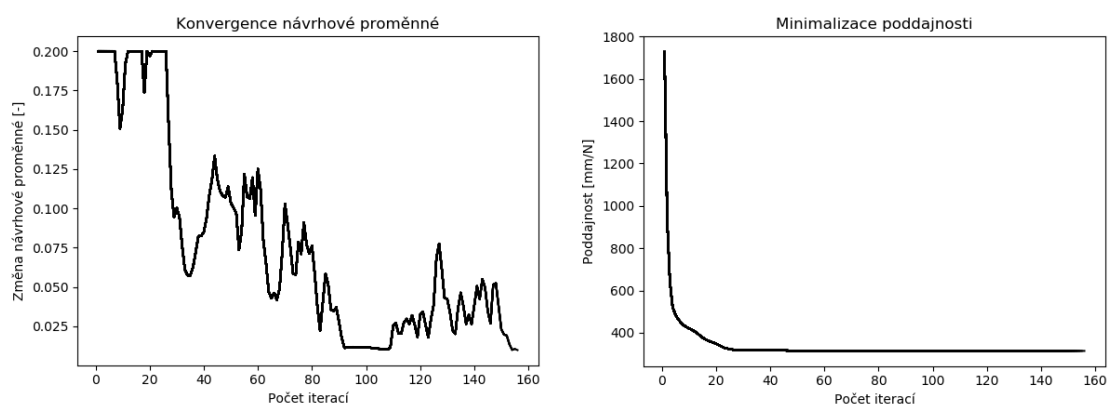
Obr. 13: OT s cílem minimalizace poddajnosti, Ω #1, vlastní zpracování



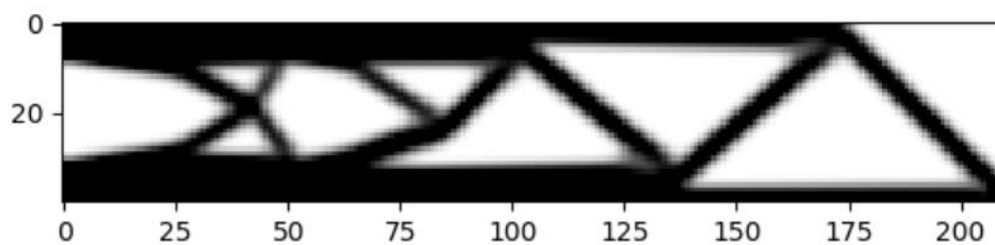
Graf 1: Konvergence návrhové proměnné, poddajnosti pro problém 1, Ω #1, vlastní zpracování



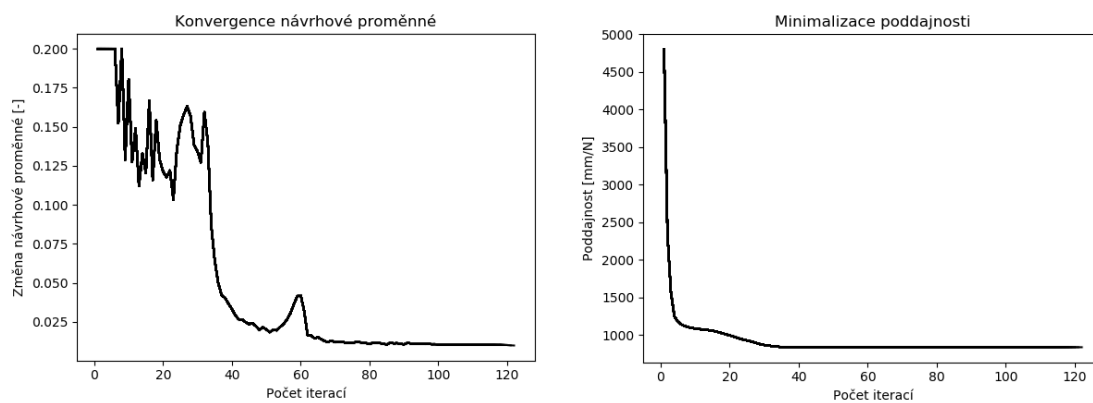
Obr. 14: OT s cílem minimalizace poddajnosti, Ω #2, vlastní zpracování



Graf 2: Konvergence návrhové proměnné, poddajnosti pro problém 1, Ω #2, vlastní zpracování



Obr. 15: OT s cílem minimalizace poddajnosti, Ω #3, vlastní zpracování



Graf 3: Konvergence návrhové proměnné, poddajnosti pro problém 1, Ω #3, vlastní zpracování

9.5 Optimalizace topologie s využitím knihovny pyansys

Jedním z cílů diplomové práce bylo také efektivní propojení programovacího jazyku Python s programovacím jazykem ANSYS APDL. Python 3 je skriptovací jazyk, který je nabízen jako volně dostupný projekt a jednou z jeho mnoha neustále vyvíjených knihoven je knihovna pyansys. Tato knihovna je dostupná na webové stránce <https://akaszynski.github.io/pyansys/index.html>

V této práci byla použita verze 0.40.3 této knihovny. Dle informací od vývojářů této knihovny by měla být kompatibilní s verzemi ANSYS v17.0 + a Pythonem 3.

K práci s touto knihovnou lze přistupovat třemi způsoby. Jedním z nich je schopnost číst binární soubory (.full, .rst, .emat, .cdb), které při jednotlivých MKP analýzách produkuje program ANSYS APDL. Dále napsáním skriptu v Pythonu s příkazy, které umí číst ANSYS APDL a spuštěním analýz nabízených v APDL právě pomocí Pythonu. Případně kombinací činnosti v APDL a Pythonu.

Kromě řešení samotné úlohy OT byl program ANSYS APDL 2019 využit také k ověření elementární matice tuhosti, hmotnosti a správnosti nastavení řešiče modální analýzy v Pythonu funkcí *eigs* (viz kapitola 9.9).

Pro oba druhy řešení byly zvoleny totožné vstupní parametry uvedené v Tab. 4:

Tab. 4: Vstupní parametry pro porovnání řešení OT jen pomocí Pythonu a řešení s využitím knihovny pyansys

Modul pružnosti reálného materiálu E_{max} [MPa]	1
Modul pružnosti virtuálního materiálu E_{min} [MPa]	$1 \cdot 10^{-9}$
Poissonův poměr μ [-]	0,3
Objemový poměr ν_f [-]	0,5
Radius filtru r_f	3
Penalizační faktor p	3

Za účelem maximalizace efektivity propojení MKP komerčního softwaru ANSYS APDL 2019 a Pythonu 3 byla tvorba modelu provedena v APDL pomocí makra *static_structural.mac*. Okrajové podmínky byly totožné jako u Problému 1 (viz Obr. 11) a návrhový prostor měl tři následující rozměry:

- $\Omega \#1: nel_x = 30, nel_y = 10$
- $\Omega \#2: nel_x = 50, nel_y = 25$
- $\Omega \#3: nel_x = 80, nel_y = 30$

Vzhledem k časové náročnosti tvorby modelu v APDL byly voleny návrhové prostory o nižším celkovém počtu elementů v porovnání s návrhovými prostory zvolenými pro řešení Problému 1.

V APDL makru *static_structural.mac* byl nejprve zvolen typ prvku PLANE182 (viz Obr. 9) příkazem *ET*, následně byly zadány materiálové parametry pomocí příkazu *MPDATA*. Cílem pro vytvoření modelu geometrie bylo sjednotit číslování sítě v APDL s číslováním sítě (viz Obr. 11) v úlohách řešených jen pomocí Pythonu. Vytvořena byla síť konečných prvků s odpovídajícím číslováním uzlů a elementů pomocí dvou následujících *for* cyklů,

kdy vstupními parametry makra byly pouze počet elementů v ose x nel_x a počet elementů v ose y nel_y :

For cykly pro vytvoření modelu geometrie v APDL

```

Vygenerování uzlů
1   for  $x = 0:nel_x$ 
2       for  $y = 0:nel_y$ 
3            $nodeid = x \cdot nely + y + 1 + x$ 
4            $N, nodeid, x, -y$ 
Generování elementů
5   for  $x = 0:nel_x - 1$ 
6       for  $y = 0:nel_y - 1$ 
7            $elid = x \cdot nely + y + 1 + x$ 
8            $E, elid, elid + 1, elid + 2 + nely, elid + nely + 1,$ 

```

kde $nodeid$ je číslo uzlu a $elid$ je číslo elementu, N je příkaz pro definici uzlu a E pro definici elementu v jazyku *APDL*. Po zadání okrajových podmínek a spuštění analýzy se vygeneroval soubor s příponou *.full*, který byl následně přečten v Pythonu pomocí inicializačního skriptu *__init__.py*.

Porovnávacími kritérii řešení jen za využití *Pythonu* a řešení s využitím knihovny *pyansys* byla doba výpočtu a počet iterací. Zbýlá kritéria, jako shoda optimalizovaného tvaru, konvergence, nebyly uvažovány vzhledem k tomu, že se jednotlivá řešení rozcházela pouze ve fázi tvorby modelu. V následující *Tab. 5* je uvedena časová náročnost a počet iterací potřebných pro vyřešení úlohy optimalizace topologie v daných návrhových prostorech Ω #1 až Ω #3.

Tab. 5: Porovnání řešení OT jen za využití Pythonu a řešení s využitím knihovny pyansys

Druh řešení OT	Návrhový prostor	nel_x	nel_y	t [s]	počet iterací
Python	Ω #1	30	10	6	53
	Ω #2	50	25	13	47
	Ω #3	80	30	18	83
APDL + pyansys	Ω #1	30	10	101	53
	Ω #2	50	25	120	47
	Ω #3	80	30	297	83

Z *Tab. 5* je patrná jednoznačná vyšší časová náročnost řešení při tvorbě modelu v *APDL* a zbytku řešení v *Pythonu*. Jedná se o průměrně 14x větší časový rozdíl způsobený čtením binárních *.full* a *.rst* *APDL* souborů. Z tohoto důvodu byly následné úlohy vypracovány pouze s užitím *Pythonu*.

9.6 Problém 2: Jednomateriálová optimalizace topologie s cílem maximalizace vlastních frekvencí

Pro modální analýzu je na rozdíl od statické strukturální úlohy třeba uvažovat i hustotu ρ daného materiálu. Modální analýza slouží v praxi ke zjištění vlastních hodnot (frekvencí) a tvarů, kterých se využívá při návrhu součástí, které jsou zatěžované dynamicky. (Bilošová, 2012)

Pro úlohu OT s cílem maximalizace vlastních frekvencí bylo naprogramováno celkem 5 skriptů. Hlavní inicializační skript, který sloužil ke spuštění celého algoritmu, nese název `__init__.py`. Ten pak postupně během iteračního cyklu spouští skripty `filter.py`, `FEMM.py` a `OC.py`.

Ve skriptu je zavedena proměnná `optf`, která umožňuje určit kolikátá vlastní frekvence má být maximalizována.

Algoritmus řešení OT s cílem maximalizace vlastních frekvencí

Definice vstupních parametrů

1 $nel_x, nel_y, vf, r_f, p, E_{min}, E_{max}, \mu, \rho, p^K, p^M, optf$

Filtrace

2 $(H, H_s) = \text{filter}(nel_x, nel_y, r_f)$

Alokace návrhové proměnné a dalších potřebných proměnných

3 Alokace ρ_e

Inicializace iteračního cyklu

4 $iter = 0; change = 1$

Iterační cyklus

5 **while** $change > 0.01 \wedge iter < 200$

6 $iter = iter + 1$

7 $\lambda_j, \phi_j = \text{FEM}(nel_x, nel_y, \rho_e, p^K, p^M, E_{min}, E_{max}, \rho, optf)$

8 citl. analýza $(\lambda_j)_{\rho_e}' = (nel_x, nel_y, \rho_e, \lambda_j, \phi_j, p^K, p^M, \mathbf{K}_E, \mathbf{M}_E, optf)$

9 citlivostní filtrace $(\lambda_j)_{\rho_e}'$

10 $\rho_{eold} = \rho_e$

11 $\rho_e = \text{OC}(nel_x, nel_y, \rho_e, (\lambda_j)_{\rho_e}', vf)$

12 výpočet změny konvergence $change = \rho_e - \rho_{eold}$

13 vykreslení optimalizovaného tvaru, grafů konvergence návrhové proměnné a maximalizace vlastní frekvence

9.6.1 Volba vstupních parametrů:

Výchozí vstupní parametry do výpočtu u úlohy č. 2 jsou uvedeny v *Tab. 6*:

Tab. 6: Výchozí vstupní parametry pro Problém 2

Modul pružnosti reálného materiálu E_{max} [MPa]	$210 \cdot 10^3$
Modul pružnosti virtuálního materiálu E_{min} [MPa]	$1 \cdot 10^{-9}$
Poissonův poměr μ [-]	0,3
Hustota ρ [$t \cdot mm^{-3}$]	$7,8 \cdot 10^{-9}$
Objemový poměr v_f [-]	0,5
Radius filtru r_f	3
Penalizační faktor pro tuhost p^K	3
Penalizační faktor pro hmotnost p^M	3

9.6.2 Výsledky OT:

Jednomateriálová optimalizace topologie s cílem maximalizace vlastní frekvence byla řešena na celkem třech různých návrhových prostorech o počtu elementů v ose x (nel_x) a v ose y (nel_y):

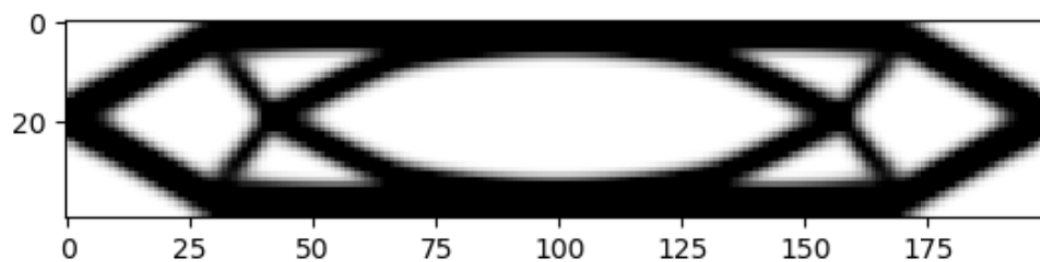
- Ω #1: $nel_x = 200, nel_y = 40$
- Ω #2: $nel_x = 300, nel_y = 50$
- Ω #3: $nel_x = 250, nel_y = 60$

Rozměry návrhového prostoru byly voleny s ohledem na typický tvar modelu geometrie nosníku v praktických aplikacích odpovídajících dané problémové situaci. V následující *Tab. 7* jsou pro jednotlivé návrhové prostory Ω #1 až Ω #3 uvedeny původní hodnoty první vlastní frekvence f_0 a výsledné hodnoty první vlastní frekvence po optimalizaci topologie f_f . V *Tab. 7* je také uveden rozdíl v hodnotách první vlastní frekvence Δf mezi původní a finální hodnotou, doba výpočtu t a počet iterací. Oproti statické analýze je zde také uvedena hodnota numerického koeficientu tlumení η , která byla pozměněna oproti statické úloze, kde hodnota η byla rovna 0,5. Důvodem změny byla divergence řešení při $\eta=0,5$.

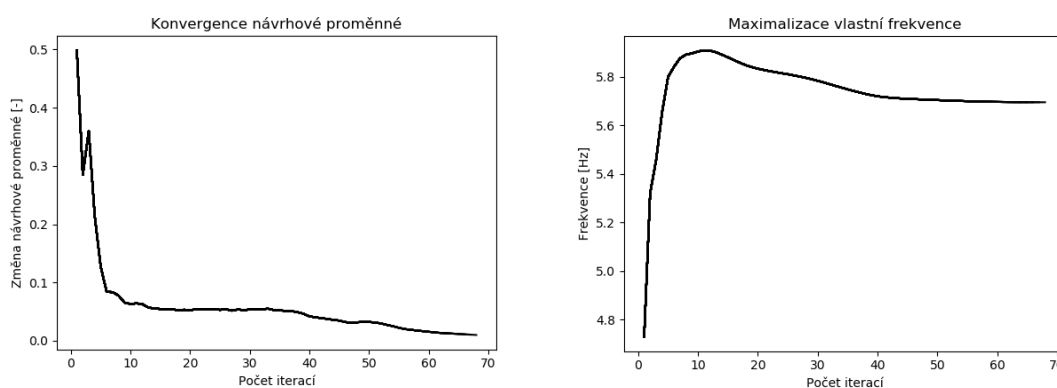
Tab. 7: Výsledné hodnoty OT s cílem maximalizace vlastní frekvence

Návrhový prostor	nel_x	nel_y	η	f_0 [Hz]	f_f [Hz]	Δf [%]	t [s]	počet iterací
Ω #1	200	40	0,2	4,73	5,70	+21,3	270	68
Ω #2	300	50	0,15	2,69	3,27	+21,6	361	77
Ω #3	250	60	0,15	4,35	5,25	+20,7	422	73

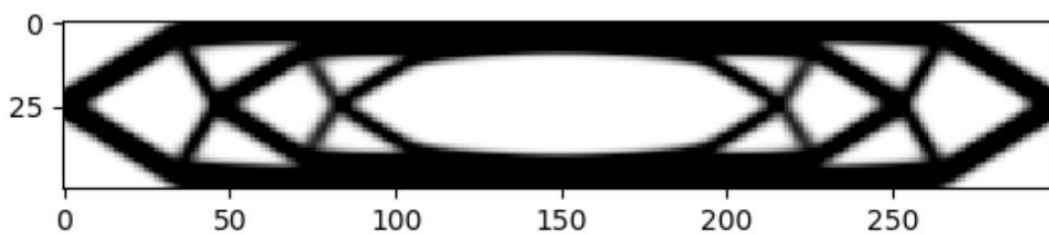
V následujících obrázcích *Obr. 16* až *Obr. 18* až jsou vykresleny optimalizované tvary pro jednotlivé návrhové prostory Ω #1 až Ω #3. Pro OT s cílem maximalizace vlastní frekvence každého z návrhových prostorů byla také na grafech *Graf 4* až *Graf 6* vykreslena konvergence návrhové proměnné a maximalizace první vlastní frekvence.



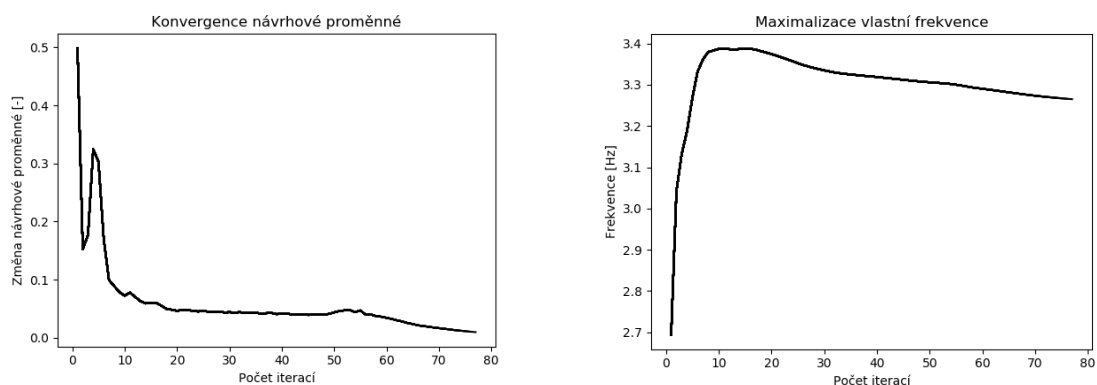
Obr. 16: Výsledný optimalizovaný tvar pro OT s cílem maximalizace vlastní frekvence pro Ω #1, vlastní zpracování



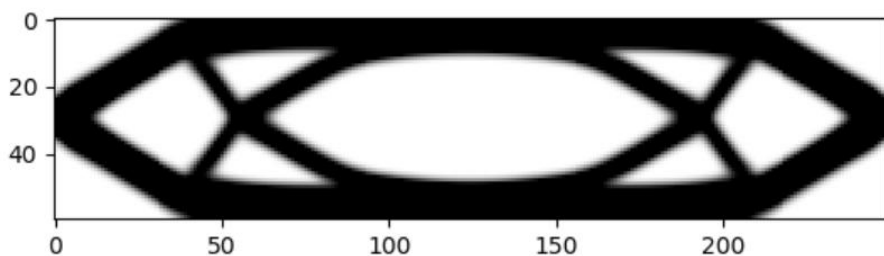
Graf 4: Konvergence návrhové proměnné, maximalizace vlastní frekvence pro problém 2, Ω #1, vlastní zpracování



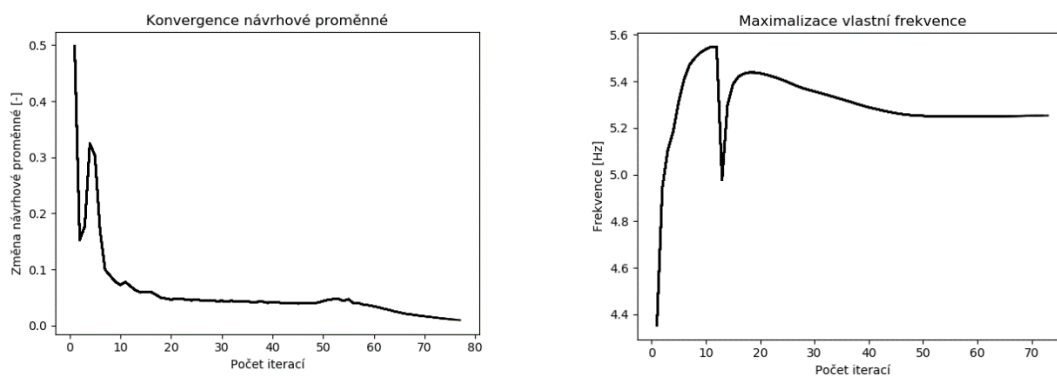
Obr. 17: Výsledný optimalizovaný tvar pro OT s cílem maximalizace vlastní frekvence pro Ω #2, vlastní zpracování



Graf 5: Konvergence návrhové proměnné, maximalizace vlastní frekvence pro problém 2, Ω #2, vlastní zpracování



Obr. 18: Výsledný optimalizovaný tvar pro OT s cílem maximalizace vlastní frekvence pro Ω #3, vlastní zpracování



Graf 6: Konvergence návrhové proměnné, maximalizace vlastní frekvence pro problém 2, Ω #3, vlastní zpracování

9.7 Problém 3: Vícemateriálová optimalizace topologie s cílem minimalizace poddajnosti

Pro úlohu vícemateriálové OT s cílem minimalizace poddajnosti bylo naprogramováno celkem 6 skriptů. Hlavní inicializační skript, který sloužil ke spuštění celého algoritmu, nese název `__init__.py`. Ten pak postupně během iteračního cyklu spouští skripty `filter.py`, `bi_top.py`, `FEMM.py`, `OC.py` a `make_bitmap.py`.

Funkce `make_bitmap` sloužila k vykreslení bitmapy se 3 barvami charakterizujícími každý materiál. Za účelem zvýšení kvality vykreslované bitmapy bylo využito přeskálování pomocí bilineární interpolace, kdy návrhová proměnná pro každý materiál byla vynásobena příslušnou proměnnou `color`, která představuje barvu v RGB složení.

Algoritmus řešení vícemateriálové OT s cílem minimalizace poddajnosti

Definice vstupních parametrů

1 $nel_x, nel_y, vf, r_f, p, q, E, \mu, tol_{out}, tol_f, iter_{max_out}, iter_{max_in}$

Filtrace

2 $(H, H_s) = \text{filter}(nel_x, nel_y, r_f)$

Alokace návrhové proměnné a dalších potřebných proměnných

3 Alokace ρ_e

Inicializace iteračního cyklu

4 $iter_{out} = 0; change_{out} = 2 tol_{out}$

Vnější iterační cyklus

5 **while** $iter_{out} < iter_{max_out} \wedge change_{out} > tol_{out}$

$\rho_e = \rho_{eold}$

for $a = 1:p$

for $b = a+1:p$

$(c, \rho_e) = \text{bi_top}(a, b, nel_x, nel_y, p, q, vf, E, \rho_e, H, H_s, iter_{max_in})$

$\rho_e = \rho_{eold}$

$iter_{in} = 0$

Vnitřní iterační cyklus

while $iter_{in} < iter_{max_in}$

$iter_{in} = iter_{in} + 1$

$U = \text{FEM}(nel_x, nel_y, \mathbf{K}_e(\rho_e), \mathbf{M}_e(\rho_e))$

citlivostní analýza – výpočet $c, \frac{\partial c}{\partial \rho_e}$

citlivostní filtrace $\frac{\partial c}{\partial \rho_e}$

$\rho_e = \text{OC}(nel_x, nel_y, a, b, vf, p, \rho_e, \frac{\partial c}{\partial \rho_e})$

$iter_{out} = iter_{out} + 1$

výpočet změny konvergence $change_{out} = \rho_e - \rho_{eold}$

if $change_{out} < tol_f \wedge r_f > 3$

$tol_f = 0,99 tol_f$

$r_f = 0,99 r_f$

$(H, H_s) = \mathbf{filter}(nel_x, nel_y, r_f)$
 vykreslení optimalizovaného tvaru, grafů konvergence návrhové
 proměnné a minimalizace poddajnosti

9.7.1 Volba vstupních parametrů:

Pro úlohu vícemateriálové OT byly zvoleny kombinace materiálů ocel, hliník a ocel, titan o poměru modulů pružnosti ocel:hliník 3:1 a ocel:titan 2:1. Výchozí vstupní parametry jsou uvedeny v *Tab. 8* a *Tab. 9*.

Tab. 8: Výchozí vstupní parametry pro kombinaci materiálů ocel, hliník

Modul pružnosti oceli [GPa]	210
Modul pružnosti hliníku [GPa]	70
Poissonův poměr μ [-]	0,3
Objemový poměr oceli v_f [-]	0,4
Objemový poměr hliníku v_f [-]	0,2
Radius filtru r_f	3
Penalizační faktor p	3

Tab. 9: Výchozí vstupní parametry pro kombinaci materiálů ocel, titan

Modul pružnosti oceli [GPa]	210
Modul pružnosti titanu [GPa]	105
Poissonův poměr μ [-]	0,3
Objemový poměr oceli v_f [-]	0,4
Objemový poměr titanu v_f [-]	0,2
Radius filtru r_f	3
Penalizační faktor p	3

9.7.2 Výsledky OT:

Vícemateriálová optimalizace topologie s cílem minimalizace poddajnosti byla řešena na celkem dvou různých návrhových prostorech o počtu elementů v ose x (nel_x) a v ose y (nel_y):

- $\Omega \#1: nel_x = 200, nel_y = 40$
- $\Omega \#2: nel_x = 180, nel_y = 60$

Kapitola s výsledky je rozdělena na dvě části, kdy v první části jsou uvedeny v *Tab. 10* výsledky vícemateriálové OT pro kombinaci materiálů ocel, hliník. Ve druhé části jsou v *Tab. 11* uvedeny výsledky OT pro druhou kombinaci materiálů ocel, titan. Pro všechny úlohy vícemateriálové OT s cílem minimalizace poddajnosti byla hodnota numerického koeficientu tlumení η rovna 0,5.

V následující *Tab. 10* jsou pro jednotlivé návrhové prostory pro kombinaci materiálů ocel, hliník, uvedeny původní hodnoty poddajnosti c_0 , výsledné hodnoty poddajnosti po

optimalizaci topologie c_f . V *Tab. 10* je také uveden rozdíl v hodnotách poddajnosti Δc mezi původní a finální hodnotou, doba výpočtu t a počet iterací.

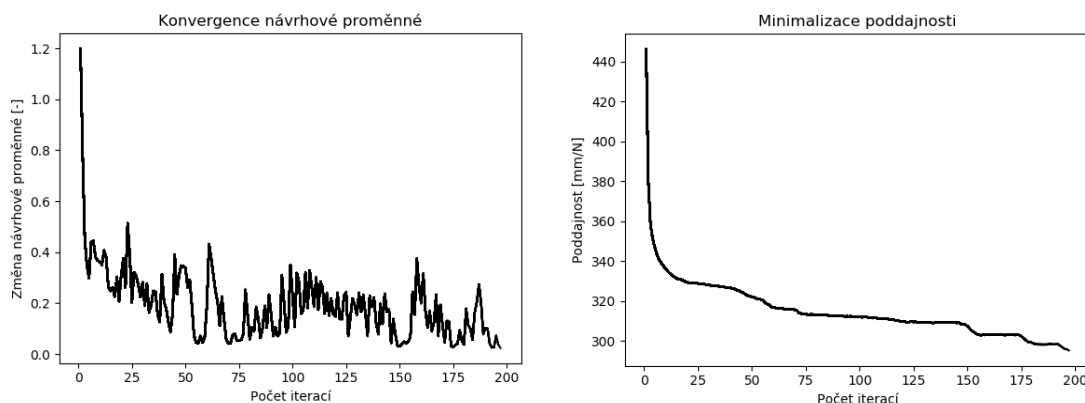
Tab. 10: Výsledné hodnoty vícemateriálové OT s cílem minimalizace poddajnosti pro kombinaci materiálů ocel, hliník

Návrhový prostor	nel_x	nel_y	c_0 [mm/N]	c_f [mm/N]	Δc [%]	t [s]	počet iterací
Ω #1	200	40	446	295	-33,9	2483	197
Ω #2	180	60	143	77	-46,2	1478	103

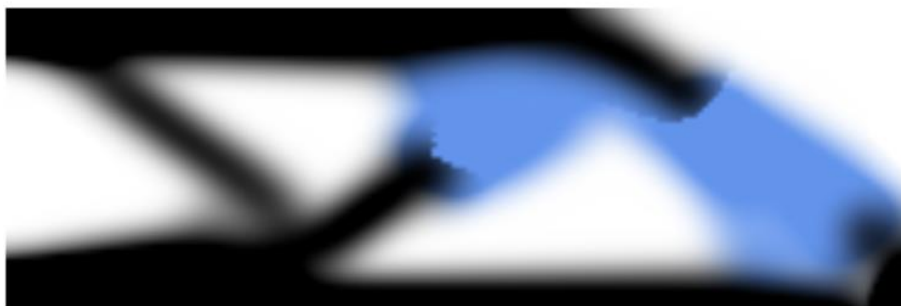
V následujících obrázcích *Obr. 19* a *Obr. 20* jsou vykresleny optimalizované tvary pro jednotlivé návrhové prostory Ω #1 a Ω #2 a kombinaci materiálů ocel, hliník. Pro OT s cílem minimalizace poddajnosti každého z návrhových prostorů byla také na grafech *Graf 7* a *Graf 8* vykreslena konvergence návrhové proměnné a minimalizace poddajnosti.



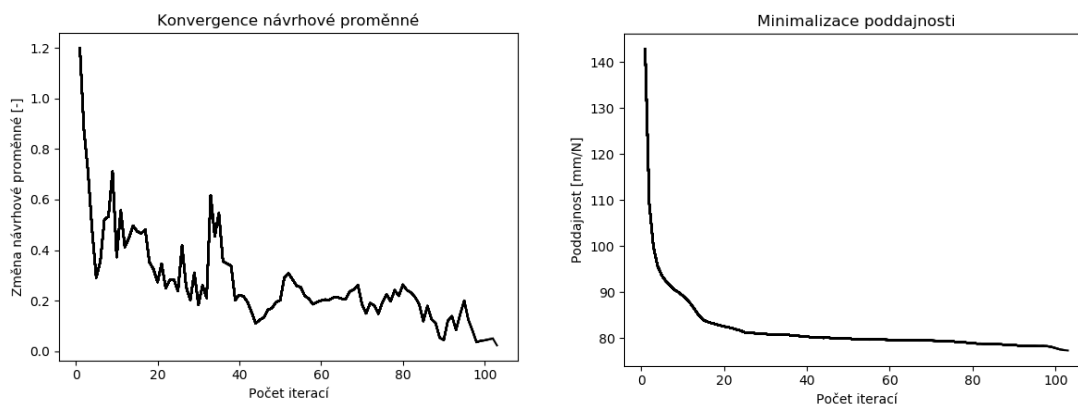
Obr. 19: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), hliník (modře), Ω #1, problém 3, vlastní zpracování



Graf 7: Konvergence návrhové proměnné, minimalizace poddajnosti pro problém 3, Ω #1, kombinace materiálů ocel, hliník, vlastní zpracování



Obr. 20: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), hliník (modře), Ω #2, problém 3, vlastní zpracování



Graf 8: Konvergence návrhové proměnné, poddajnosti pro problém 3, Ω #2, kombinace materiálů ocel, hliník, vlastní zpracování

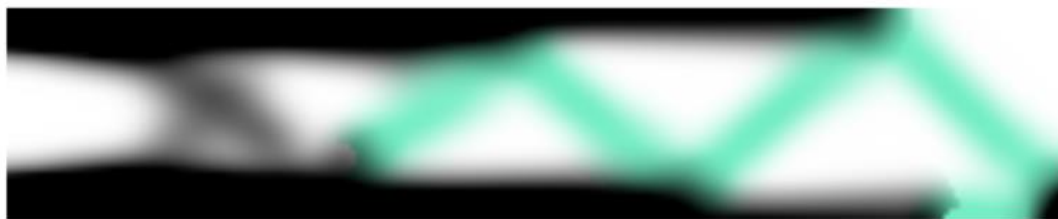
V následující Tab. 11 jsou pro jednotlivé návrhové prostory pro kombinaci materiálů ocel, titan, uvedeny původní hodnoty poddajnosti c_0 , výsledné hodnoty poddajnosti po optimalizaci topologie c_f . V Tab. 11 je také uveden rozdíl v hodnotách poddajnosti Δc mezi původní a finální hodnotou, doba výpočtu t a počet iterací.

Tab. 11: Výsledné hodnoty vícemateriálové OT s cílem minimalizace poddajnosti pro kombinaci materiálů ocel, titan

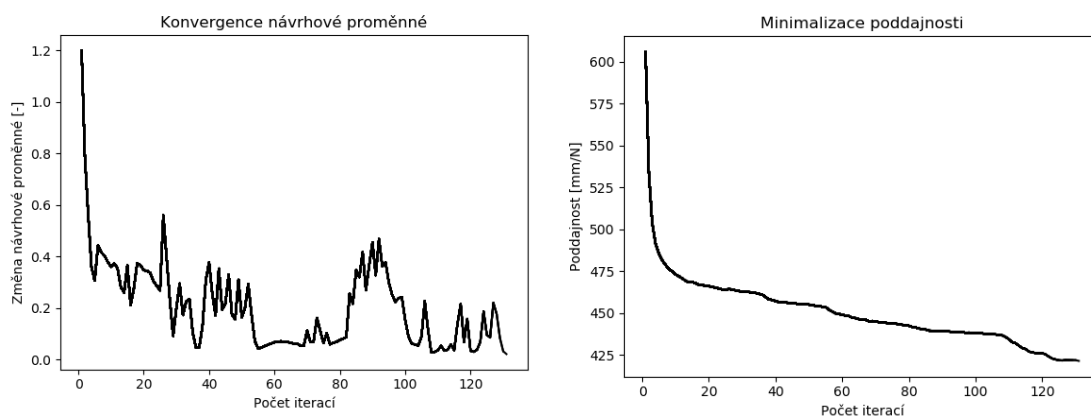
Návrhový prostor	nel_x	nel_y	c_0 [mm/N]	c_f [mm/N]	Δc [%]	t [s]	počet iterací
Ω #1	200	40	606	421	-30,5	1387	131
Ω #2	180	60	191	108	-43,5	1883	133

V následujících obrázcích Obr. 21 a Obr. 22 jsou vykresleny optimalizované tvary pro jednotlivé návrhové prostory Ω #1 a Ω #2 a kombinaci materiálů ocel, titan. Pro OT s cílem minimalizace poddajnosti každého z návrhových prostorů byla také na grafech

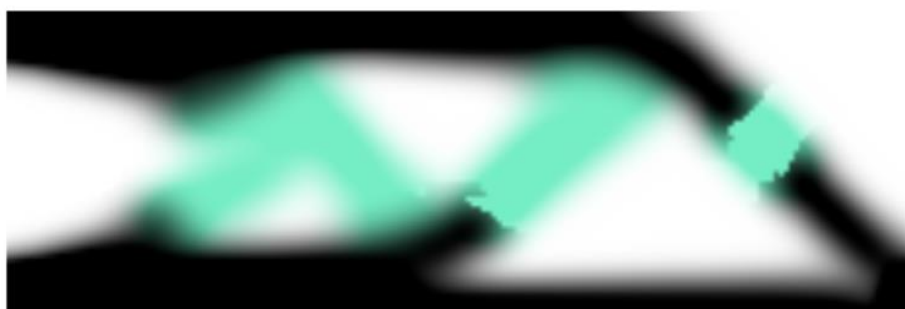
Graf 9 a Graf 10 vykreslena konvergence návrhové proměnné a minimalizace poddajnosti.



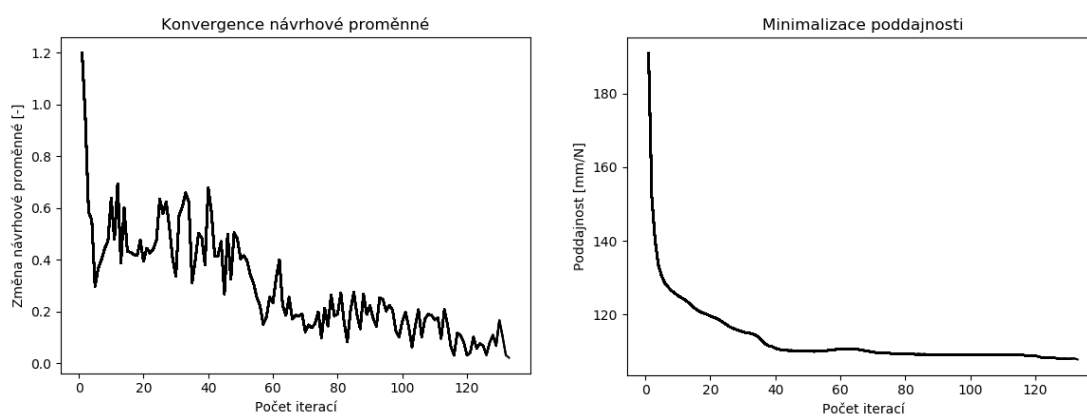
Obr. 21: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), titan (zeleně), Ω #1, problém 3, vlastní zpracování



Graf 9: Konvergence návrhové proměnné, poddajnosti pro problém 3, Ω #1, kombinace materiálů ocel, titan, vlastní zpracování



Obr. 22: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), titan (zeleně), Ω #2, problém 3



Graf 10: Konvergence návrhové proměnné, poddajnosti pro problém 3, Ω #2, kombinace materiálů ocel, titan, vlastní zpracování

9.8 Problém 4: Vícemateriálová optimalizace topologie s cílem maximalizace vlastní frekvence

Pro úlohu vícemateriálové OT s cílem minimalizace poddajnosti bylo naprogramováno celkem 7 skriptů. Hlavní inicializační skript, který sloužil ke spuštění celého algoritmu, nese název `__init__.py`. Ten si pak postupně během iteračního cyklu spouští skripty `filter.py`, `bi_top.py`, `FEMM.py`, `getsensitivity.py`, `OC.py` a `make_bitmap.py`.

Funkce `make_bitmap` měla stejnou strukturu jako v případě Problému 3, jen s rozdílem vykreslování dvou materiálů bez dutiny.

Ve skriptu je zavedena proměnná `optf`, která umožňuje určit kolikátá vlastní frekvence má být maximalizována.

Algoritmus řešení vícemateriálové OT s cílem maximalizace vlastní frekvence

Definice vstupních parametrů

1 $nel_x, nel_y, vf, r_f, p, E_{min}, E_{max}, \mu, \rho, p, p^M, q^K, q^M, optf, \mu, tol_{out}, tol_f, iter_{max_out}, iter_{max_in}$

Filtrace

2 $(H, H_s) = \text{filter}(nel_x, nel_y, r_f)$

Alokace návrhové proměnné a dalších potřebných proměnných

3 Alokace ρ_e

Inicializace iteračního cyklu

4 $iter_{out} = 0; change_{out} = 2 tol_{out}$

Vnější iterační cyklus

5 **while** $iter_{out} < iter_{max_out} \wedge change_{out} > tol_{out}$

$\rho_e = \rho_{eold}$

for $a = 1:p$

for $b = a+1:p$

$(c, \rho_e) = \text{bi_top}(a, b, nel_x, nel_y, p, q, vf, E, \rho_e, H, H_s, iter_{max_in})$

$\rho_e = \rho_{eold}$

$iter_{in} = 0$

Vnitřní iterační cyklus

while $iter_{in} < iter_{max_in}$

$iter_{in} = iter_{in} + 1$

$U = \text{FEM}(nel_x, nel_y, E)$

citl. analýza $(\lambda_j)_{\rho_e}' = (nel_x, nel_y, \rho_e, \lambda_j, \phi_j, p^K, p^M, K_e, M_e, optf)$

citlivostní filtrace $(\lambda_j)_{\rho_e}'$

$\rho_e = \text{OC}(nel_x, nel_y, a, b, vf, p, \rho_e, (\lambda_j)_{\rho_e}')$

$iter_{out} = iter_{out} + 1$

výpočet změny konvergence $change_{out} = \rho_e - \rho_{eold}$

```

if  $change_{out} < tol_f \wedge r_f > 3$ 
     $tol_f = 0,99 \cdot tol_f$ 
     $r_f = 0,99 \cdot r_f$ 
     $(H, H_s) = \text{filter}(nel_x, nel_y, r_f)$ 
    vykreslení optimalizovaného tvaru, grafů konvergence návrhové
    proměnné a maximalizace vlastní frekvence

```

9.8.1 Volba vstupních parametrů:

Pro úlohu vícemateriálové OT byly zvoleny kombinace materiálů ocel, hliník a ocel, titan o stejném poměru modulů pružnosti jako v případě předchozí vícemateriálové OT s cílem minimalizace poddajnosti. Výchozí vstupní parametry jsou uvedeny v *Tab. 12* a *Tab. 13*.

Tab. 12: Výchozí vstupní parametry pro kombinaci materiálů ocel, hliník

Modul pružnosti oceli [GPa]	210
Modul pružnosti hliníku [GPa]	70
Poissonův poměr μ [-]	0,3
Hustota ρ [$t \cdot mm^{-3}$]	$2,7 \cdot 10^{-9}$
Objemový poměr oceli v_f [-]	0,4
Objemový poměr hliníku v_f [-]	0,2
Radius filtru r_f	9
Penalizační faktor p^K	3
Penalizační faktor p^M	3

Tab. 13: Výchozí vstupní parametry pro kombinaci materiálů ocel, titan

Modul pružnosti oceli [GPa]	210
Modul pružnosti titanu [GPa]	105
Poissonův poměr μ [-]	0,3
Hustota ρ [$t \cdot mm^{-3}$]	$4,49 \cdot 10^{-9}$
Objemový poměr oceli v_f [-]	0,4
Objemový poměr titanu v_f [-]	0,2
Radius filtru r_f	9
Penalizační faktor p^K	3
Penalizační faktor p^M	3

9.8.2 Výsledky optimalizace topologie:

Vícemateriálová optimalizace topologie s cílem maximalizace vlastní frekvence byla řešena na celkem dvou různých návrhových prostorech o počtu elementů v ose x (nel_x) a v ose y (nel_y):

- Ω #1: $nel_x = 180, nel_y = 60$
- Ω #2: $nel_x = 300, nel_y = 50$

Kapitola s výsledky je rozdělena na dvě části, kdy v první části jsou uvedeny v *Tab. 14* výsledky vícemateriálové OT pro kombinaci materiálů ocel, hliník. Ve druhé části jsou v *Tab. 15* uvedeny výsledky OT pro druhou kombinaci materiálů ocel, titan.

V následující *Tab. 14* jsou pro jednotlivé návrhové prostory Ω #1 a Ω #2 pro kombinaci materiálů ocel, hliník, uvedeny původní hodnoty první vlastní frekvence f_0 , výsledné hodnoty první vlastní frekvence po optimalizaci topologie f_f . V *Tab. 14* je také uveden rozdíl v hodnotách první vlastní frekvence Δf mezi původní a finální hodnotou, doba výpočtu t a počet iterací. Oproti statické analýze je zde také uvedena hodnota numerického koeficientu tlumení η , která byla pozměněna oproti statické úloze, kde hodnota η byla rovna 0,5. Důvodem změny byla divergence řešení při $\eta=0,5$.

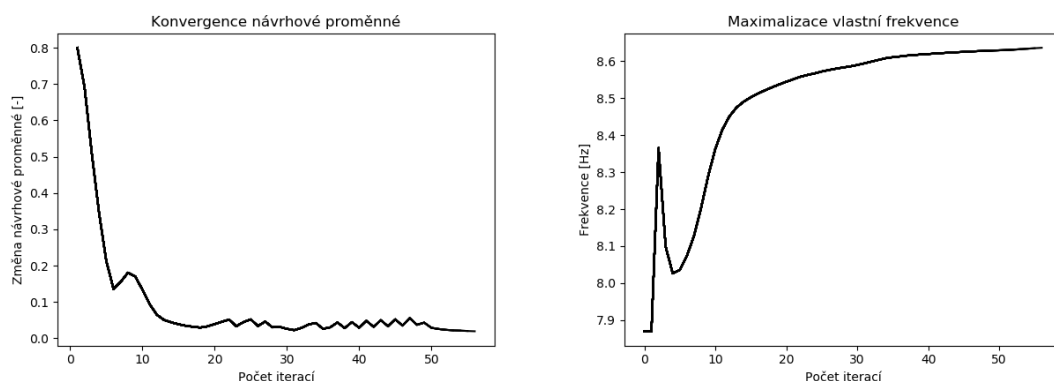
Tab. 14: Výsledné hodnoty vícemateriálové OT s cílem maximalizace vlastní frekvence, kombinace materiálů ocel, hliník

Návrhový prostor	nel_x	nel_y	η	f_0 [Hz]	f_f [Hz]	Δf [%]	t [s]	počet iterací
Ω #1	180	60	0,15	7,87	8,64	+9,78	955	56
Ω #2	300	50	0,15	2,79	3,03	+8,60	2638	114

V následujících obrázcích *Obr. 23* a *Obr. 24* jsou vykresleny optimalizované tvary pro jednotlivé návrhové prostory Ω #1 a Ω #2 a kombinaci materiálů ocel, hliník. Pro OT s cílem maximalizace vlastní frekvence každého z návrhových prostorů byla také na grafech *Graf 11* a *Graf 12* a vykreslena konvergence návrhové proměnné a maximalizace první vlastní frekvence.



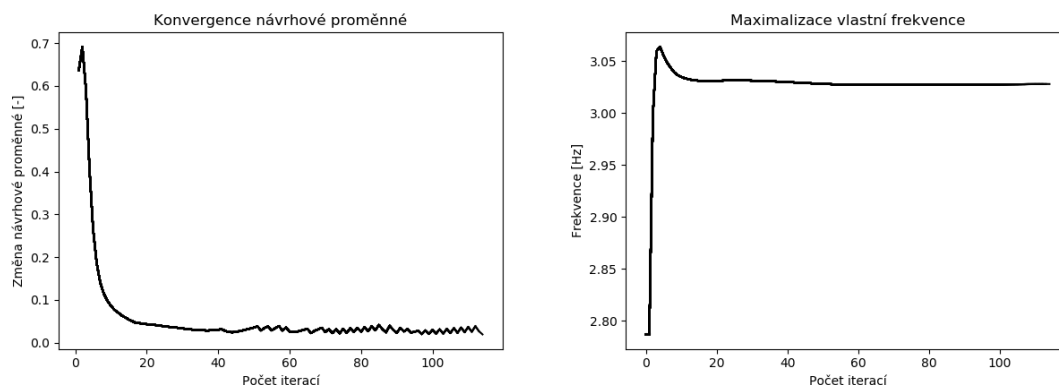
Obr. 23: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), hliník (modře), Ω #1, problém 4, vlastní zpracování



Graf 11: Konvergence návrhové proměnné, maximalizace vlastní frekvence pro problém 4, Ω #1, kombinace materiálů ocel, hliník, vlastní zpracování



Obr. 24: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), hliník (modře), Ω #2, problém 4, vlastní zpracování



Graf 12: Konvergence návrhové proměnné, maximalizace vlastní frekvence pro problém 4, Ω #2, kombinace materiálů ocel, hliník

V následující *Tab. 15* jsou pro jednotlivé návrhové prostory Ω #1 a Ω #2, pro kombinaci materiálů ocel, titan, uvedeny původní hodnoty první vlastní frekvence f_0 , výsledné hodnoty první vlastní frekvence po optimalizaci topologie f_f . V *Tab. 15* je také uveden rozdíl v hodnotách první vlastní frekvence Δf mezi původní a finální hodnotou, doba výpočtu t , počet iterací a numerický koeficient tlumení η .

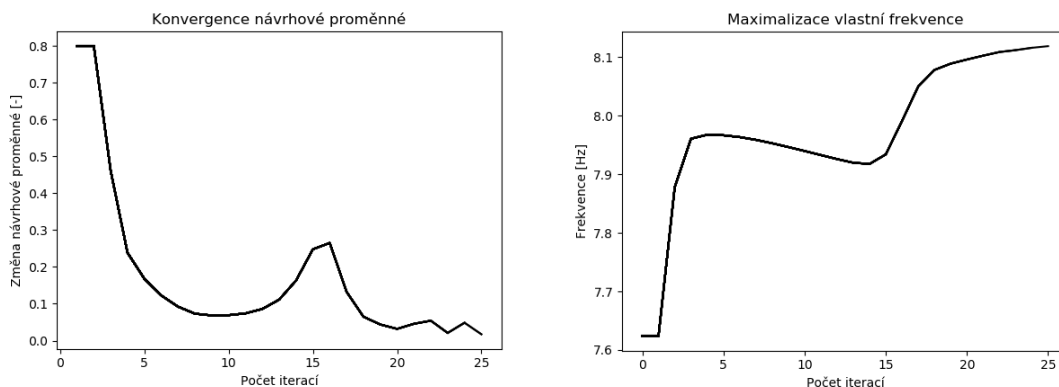
Tab. 15: Výsledné hodnoty vícemateriálové OT s cílem maximalizace vlastní frekvence, kombinace materiálů ocel, titan

Návrhový prostor	nel_x	nel_y	η	f_0 [Hz]	f_f [Hz]	Δf [%]	t [s]	počet iterací
Ω #1	180	60	0,40	7,62	8,12	+6,14	254	25
Ω #2	300	50	0,40	2,75	2,95	+7,27	1027	44

V následujících obrázcích *Obr. 25* a *Obr. 26* jsou vykresleny optimalizované tvary pro jednotlivé návrhové prostory Ω #1 a Ω #2 a kombinaci materiálů ocel, hliník. Pro OT s cílem maximalizace vlastní frekvence každého z návrhových prostorů byla také na grafech *Graf 13* a *Graf 14* vykreslena konvergence návrhové proměnné a maximalizace první vlastní frekvence.



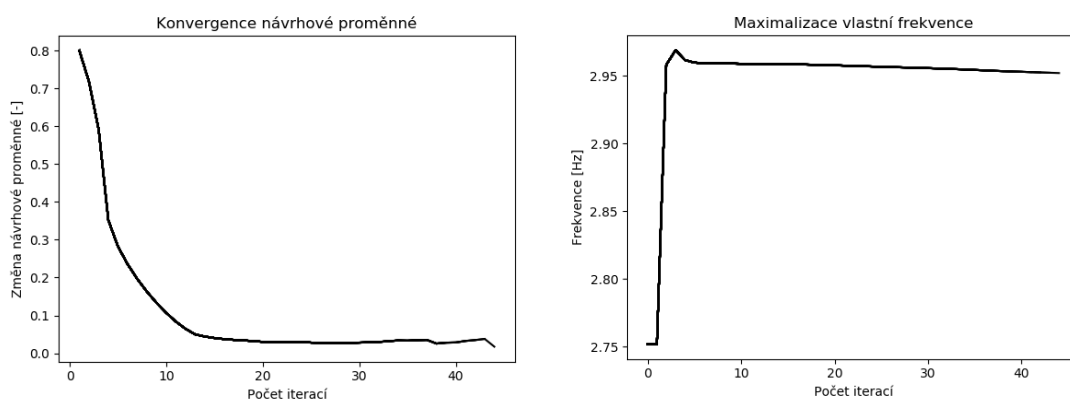
Obr. 25: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), titan (zeleně), Ω #1, problém 4, vlastní zpracování



Graf 13: Konvergence návrhové proměnné, maximalizace vlastní frekvence pro problém 4, Ω #1, kombinace materiálů ocel, titan, vlastní zpracování



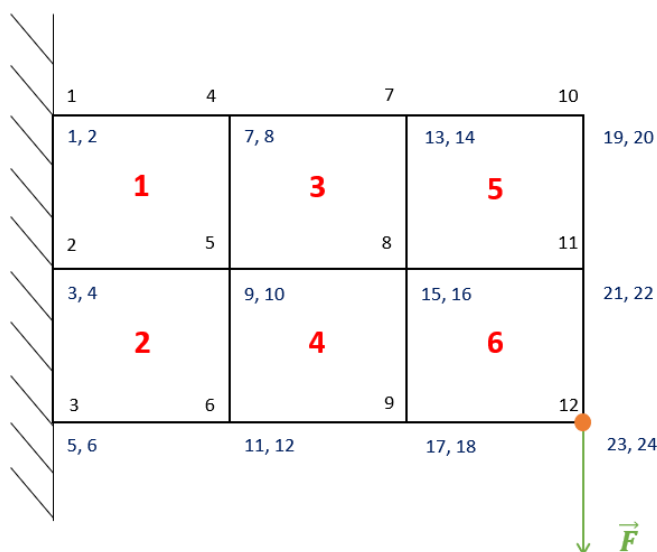
Obr. 26: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), titan (zeleně), Ω #2, problém 4, vlastní zpracování



Graf 14: Konvergence návrhové proměnné, maximalizace vlastní frekvence pro problém 4, Ω #2, kombinace materiálů ocel, titan, vlastní zpracování

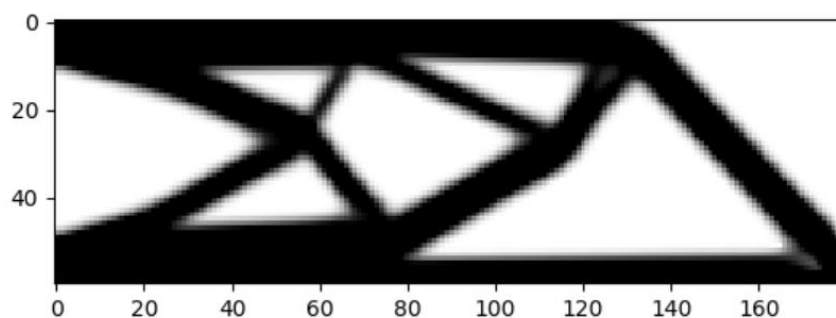
9.9 Verifikace řešiče statické a dynamické úlohy

Verifikace správnosti řešení byla provedena u části programu sloužící k MKP statické a dynamické (v našem případě modální) analýze. V případě statické strukturální analýzy byl proveden výpočet posuvů jednotlivých uzlů a v rámci verifikace byla provedena verifikace posuvu dolního pravého uzlu ve směru osy y. Viz Obr. 27.



Obr. 27: Verifikace řešiče statické úlohy, oranžově vyznačen uzel č. 12 podléhající verifikaci, červeně – elementy, černě – uzly, modře – stupně volnosti, vlastní zpracování

Pro verifikaci statické úlohy byla použita geometrie o rozměru návrhového prostoru 180 x 60 elementů, viz následující Obr. 28. Jako materiál byla uvažována ocel s $E = 210\,000$ MPa, $\mu = 0,3$.

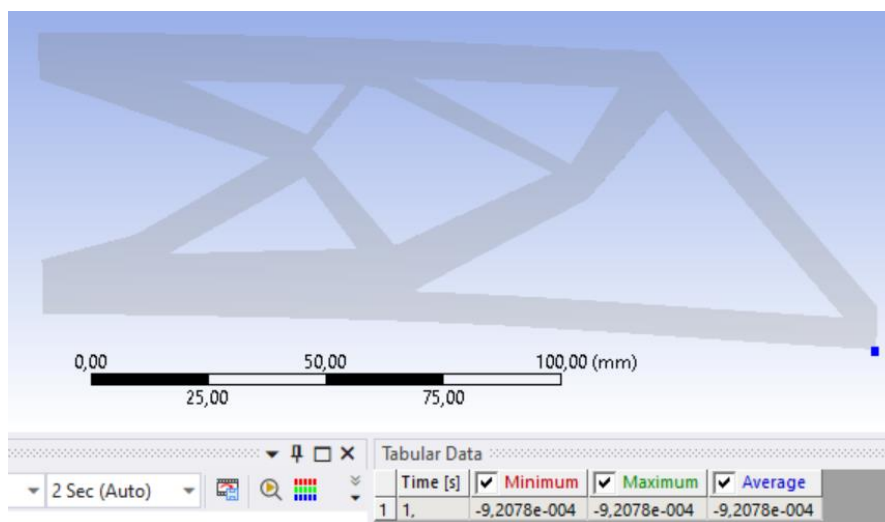


Obr. 28: Optimalizovaný tvar návrhového prostoru použitý pro verifikaci řešiče statické úlohy, vlastní zpracování

Porovnání výsledků z *Pythonu* s využitím příkazu *spsolve* z knihovny *SciPy* s řešením pomocí komerčního výpočetního MKP softwaru *ANSYS Workbench 2020* je možné vidět na následujících obrázcích Obr. 29 a Obr. 30.

```
U. [-0.0009026] mm
iter.: 99, c: 0.001, vol.: 0.500, change: 0.014
```

Obr. 29: Výsledný posuv dolního pravého uzlu struktury z Obr. 28 pomocí vytvořeného programu v *Pythonu*, vlastní zpracování



Obr. 30: Výsledný posuv dolního pravého uzlu struktury z Obr. 28 pomocí software *ANSYS Workbench*, vlastní zpracování

Rozdíl mezi posuvy činil přibližně 2 %. Pro ověření správnosti nastavení řešiče modální analýzy *eigs* v *Pythonu* s řešením v *ANSYS APDL 2020* byl použit model materiálu o charakteristikách $E = 210\,000\text{ MPa}$, $\mu = 0,3$, $\rho = 1\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a počtu elementů 8×3 o

rozměru 1 mm. Pro import dat z *APDL* a následné ověření řešiče *eigs* byl napsán skript v *Pythonu* *modal_ver.py*, který je obsažen mezi přílohami diplomové práce. Výsledné hodnoty verifikace je možné vidět na následujících obrázcích *Obr. 31* a *Obr. 32*.

```
***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****
SET   TIME/FREQ   LOAD STEP   SUBSTEP   CUMULATIVE
  1    32.652         1         1         1

  2   144.22         1         2         2

  3   145.80         1         3         3
```

Obr. 31: Hodnoty vlastní frekvence pro první tři módy vypočítané pomocí ANSYS APDL, vlastní zpracování

```
Počet elementů: 8 x 3

První tři vlastní frekvence:
32.651656 Hz
144.222628 Hz
145.801241 Hz
```

Obr. 32: Hodnoty vlastní frekvence pro první tři módy vypočítané pomocí vytvořeného programu v Pythonu, vlastní zpracování

9.10 Celkové zhodnocení výsledků optimalizace topologie

Pro přehledné srovnání jednotlivých úloh optimalizace topologie byla zpracována *Tab. 16*. V tabulce je uvedena daná problémová situace, rozdíl v hodnotách poddajnosti Δc nebo první vlastní frekvence Δf mezi původní a finální hodnotou, doba výpočtu a počet iterací potřebných pro řešení OT.

Tab. 16: Celkové srovnání výsledků optimalizace topologie jednotlivých problémových situací

Problémová situace	Ω	$\Delta c/\Delta f$ [%]	Čas [s]	Počet iterací
Jednomateriálová OT, minimalizace poddajnosti	Ω #1	-81,9	234	85
	Ω #2	-81,9	670	156
	Ω #3	-82,6	330	122
Jednomateriálová OT, maximalizace frekvence	Ω #1	+21,3	270	68
	Ω #2	+21,6	361	77
	Ω #3	+20,7	422	73
Vícemateriálová OT, minimalizace poddajnosti (ocel, hliník)	Ω #1	-33,9	2483	197
	Ω #2	-46,2	1478	103
Vícemateriálová OT, minimalizace poddajnosti (ocel, titan)	Ω #1	-30,5	1387	131
	Ω #2	-43,5	1883	133
Vícemateriálová OT, maximalizace frekvence (ocel, hliník)	Ω #1	+9,78	955	56
	Ω #2	+8,60	2638	114
Vícemateriálová OT, maximalizace frekvence (ocel, titan)	Ω #1	+6,14	254	25
	Ω #2	+7,27	1027	44

Z *Tab. 16* vyplývá, že výpočtově nejnáročnější jsou úlohy vícemateriálové OT s cílem minimalizace poddajnosti jak z pohledu počtu iterací, tak času potřebnému k provedení optimalizace. Také je možné z výsledků vyvodit, že jak u jedno, tak i vícemateriálové optimalizace je náročnější úlohou OT s cílem minimalizace poddajnosti oproti OT s cílem maximalizace vlastní frekvence. Významný vliv na dobu výpočtu má vykreslování optimalizovaného tvaru. S tím také souvisí větší časová náročnost úloh vícemateriálové OT kvůli vykreslování dvou nebo tří materiálů v podobě bitmapy oproti vykreslování pouze jednoho materiálu.

V případě jednomateriálové OT s cílem minimalizace poddajnosti se podařilo během iteračního cyklu snížit poddajnost struktury u všech návrhových prostorů o nejméně 81,9 %. V případě vícemateriálové OT s cílem minimalizace poddajnosti se podařila poddajnost struktury snížit o nejméně 30,5 % a nejvíce o 46,2 %. Ze dvou kombinací materiálů vykazuje větší snížení poddajnosti struktury kombinace ocel, hliník.

U úlohy jednomateriálové OT s cílem maximalizace vlastní frekvence došlo ke zvýšení hodnoty první vlastní frekvence nejméně o 20,7 % a nejvíce o 21,6 %. Při kombinaci dvou materiálů se podařilo zvýšit vlastní frekvenci nejméně o 6,14 % a nejvíce o 9,78 %. Větší zvýšení vlastní frekvence ze dvou kombinací materiálů vykazuje kombinace oceli a hliníku.

10 ZÁVĚR

10.1 Cíle práce a přehled výsledků

V diplomové práci byla nejprve provedena rešeršní analýza publikovaných metod optimalizace topologie struktur složených z jednoho či více materiálů. V rešeršní části byl také zpracován přehled publikovaných algoritmů optimalizace topologie s uvedením teoretických vztahů obsažených v použitých algoritmech.

Vzhledem k problémovým situacím, které byly stanoveny na základě cílů práce, byla v programovacím jazyku *Python 3* použita metoda SIMP jak pro optimalizaci struktury tvořené jedním materiálem, tak také pro optimalizaci vícemateriálových struktur. Poznatky z části rešerše, věnující se u vícemateriálové optimalizace algoritmu střídající aktivní fáze pro optimalizaci s cílem minimalizace poddajnosti, byly využity pro napsání algoritmu s cílem maximalizace vlastní frekvence konstrukce složené z více materiálů. Výsledkem byl algoritmus, který vykazoval z pohledu časové náročnosti výpočtu lepší výsledky než publikovaný algoritmus střídající aktivní fáze pro statickou úlohu. Vliv na menší časovou náročnost dynamické úlohy ovšem má také uvažování modelu materiálu se dvěma materiály bez dutiny, což je rozdíl oproti statické úloze, kde jsou uvažovány dva materiály a také dutina. V případě dynamické úlohy byl zohledněn také vliv numerického koeficientu tlumení η na konvergenci nebo naopak divergenci řešení optimalizace topologie. Pro úlohy vícemateriálové optimalizace topologie byly použity kombinace materiálů ocel, hliník a ocel, titan, kdy jak v případě statické, tak i v případě dynamické analýzy vykazuje lepší vlastnosti po optimalizaci struktura složená z oceli a hliníku.

Součástí diplomové práce je také verifikace řešičů statické a dynamické analýzy, které byly použity ve funkci řešící metodu konečných prvků.

Všechny skripty napsané v *Pythonu 3* či *APDL* jsou součástí příloh a umožňují spuštění optimalizačních úloh pro dané problémové situace.

10.2 Návrhy pro další rozvoj

Stanovené výstupy práce v sobě skrývají mnoho možností pro další rozvoj. Jednou z možností je rozšíření popsaných algoritmů optimalizace z prostoru dvourozměrného do prostoru třírozměrného. V části rešerše věnované publikovaným algoritmům, byl zmíněn algoritmus pro úlohu optimalizace topologie s cílem minimalizace poddajnosti v třírozměrném prostoru. Dle daných informací není publikován algoritmus s cílem maximalizace vlastní frekvence v třírozměrném prostoru.

Dalším možným rozšířením výstupů diplomové práce může být zpracování efektivnějšího propojení mezi programy *ANSYS APDL* a *Python 3*, případně naprogramování vícemateriálové optimalizace topologie čistě v prostředí *APDL*.

11 BIBLIOGRAFIE

- Bendsoe, M. P. and Sigmund, O. 1999.** Material interpolation schemes in topology optimization. *Arch. Appl. Mech.* 69, 1999, pp. 635-654.
- Bendsoe, Martin P. 1995.** *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material.* Lyngby, Denmark : Springer, 1995.
- Bilošová, Alena. 2012.** *Aplikovaný mechanik jako součást týmu konstruktérů a vývojářů: Část modální zkoušky.* [Dostupné z <http://projekty.fs.vsb.cz/147/ucebniopory/978-80-248-2758-2.pdf>] Ostrava : VŠB TU Ostrava, 2012.
- Du, Jianbin and Olhoff, Niels. 2007.** Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps. *Structural and Multidisciplinary Optimization.* 34(2), 2007.
- Du, Jianbin and Olhoff, Niels. 2005.** Topology Optimization of Continuum Structures with Respect to Simple and Multiple Eigenfrequencies. 2005.
- Gonçalves, Filipe Assis. 2018.** *Introduction to Structural Optimization using the ESO and BESO Evolutionary Methods.* Porto. Master's thesis. Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia : s.n., 2018.
- Janíček, Přemysl. 2014.** *Systémová metodologie : brána do řešení problémů.* Brno : Akademické nakladatelství CERM, 2014.
- Jennings, Winston. 2020.** How durable are Topology Optimized parts? *Grabcad.* [Online] 2020. [Citace: 21. 6. 2020.] <https://grabcad.com/groups/generative-design-topology-optimization/discussions/how-durable-are-topology-optimized-parts>.
- Montes, Miguel Angel Ochoa. 2016.** *Topology optimization algorithms for the solution of compliance and volume problems in 2D.* Guanajuato, México. Master's thesis. Centro de Investigación en Matemáticas A. C. : s.n., 2016.
- Petruška, Jindřich. nedatováno.** Počítačové metody mechaniky II. *Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky.* [Online] nedatováno. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/images/opory/MKP%20v%20inzenyrskych%20vypoctech/RIV.pdf>.
- PYPL. 2020.** PYPL PopularitY of Programming Language. *PYPL PopularitY of Programming Language.* [Online] 2020. <https://www.youtube.com/watch?v=T4JkCkfvKwg>.
- Querin, Osvaldo M., et al. 2017.** *Topology design methods for structural optimization.* s.l. : London : Elsevier ; Academic Press, 2017.
- Rozvany, George and Lewinski, Tomasz. 2014.** *Topology optimization in structural and continuum mechanics.* s.l. : CISM International Centre for Mechanical Sciences, 2014.
- Sanches, Renato Picelli. 2015.** *Evolutionary Topology Optimization of Fluid-structure Interaction Problems.* Campinas. Master's thesis. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica : s.n., 2015.

- Sigmund, Ole. 2007.** Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Struct Multidisc Optim.* 33, 2007.
- , **1997.** On the design of compliant mechanisms using topology optimization. *Mech. Struct. Mach.* 1997, 25.
- Suo, Xiaoyu, et al. 2019.** Bi-material Topology Optimization Using Analysis Mesh-Independent Point-Wise Density Interpolation. *Acta Mechanica Solida Sinica.* 2019.
- Svanberg, K. 1987.** The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization. *Int J Numer Methods Eng.* 24, 1987, pp. 359-373.
- Švec, Jan. 2002.** *Učebnice jazyka Python (aneb Létající cirkus).* 2002.
- Tavakoli, R. and Mohseni, S. M. 2014.** Alternating active-phase algorithm for multimaterial topology optimization problems: A 115-line MATLAB implementation. *Structural and Multidisciplinary Optimization.* 49, 2014.
- Wei, Peng, et al. 2018.** An 88-line MATLAB code for the parameterized level set method based topology optimization using radial basis functions. *Structural and Multidisciplinary Optimization.* 58, 2018.
- Zhang, Weihang, Zhu, Jihong and Gao, Tong. 2016.** *Topology optimization in engineering structure design.* s.l. : London : ISTE Press Ltd. ; Oxford, UK : Elsevier Ltd., 2016.
- Zuo, Wenjie and Saitou, Kazuhiro. 2016.** Multi-material topology optimization using ordered SIMP interpolation. *Struct Multidisc Optim.* 2016.

SEZNAM ZKRATEK

Význam zkratky byl vysvětlen v textu diplomové práce při jejím prvním výskytu. V následující tabulce jsou uvedeny všechny tyto zkratky.

OT	Optimalizace topologie
MKP	Metoda konečných prvků
SIMP	„ <i>Solid Isotropic Material with Penalization</i> “
ESO	„ <i>Evolutionary Structural Optimization</i> “
BESO	„ <i>Bidirectional Evolutionary Structural Optimization</i> “
FSD	„ <i>Fully Stressed Design</i> “
CAO	„ <i>Computer-Aided Optimization</i> “
SKO	„ <i>Soft Kill Option</i> “
OC	„ <i>Optimality Criteria</i> “

SEZNAM SYMBOLŮ

Veličina	Jednotky	Název veličiny
Π	[J]	Celková potenciální energie
a_e	[mm]	Šířka dutiny
b_e	[mm]	Výška dutiny
θ_e	[°]	Orientace dutiny
v_e	[mm ³]	Objem e-tého konečného prvku
ρ_e	[-]	Virtuální hustota/návrhová proměnná
N/N_e	[-]	Celkový počet prvků
V	[mm ³]	Výsledný/cílový objem návrhového prostoru
E_e^0	[MPa]	Původní modul pružnosti
E_e	[MPa]	Virtuální modul pružnosti daného elementu
p	[-]	Penalizační faktor
c	[mm/N]	Poddajnost
\bar{V}_s	[mm ³]	Maximální objem prvku
$\mathbf{K}_e/\mathbf{k}_0$	[N/mm]	Elementární matice tuhosti
\mathbf{F}	[N]	Vektor zatížení
ω_j	[rad·s ⁻¹]	J-tá vlastní frekvence
φ_j	[-]	Vlastní vektor příslušný j-té vlastní frekvenci
\mathbf{K}	[N/mm]	Globální matice tuhosti
\mathbf{M}	[kg]	Globální matice hmotnosti
δ_{jk}	[-]	Kroneckerovo delta
$\underline{\rho}$	[-]	Malé kladné číslo definované k zabránění singularity
α/vf	[-]	Objemový poměr
E_{max}	[MPa]	Modul pružnosti materiálu
E_{min}	[MPa]	Modul pružnosti virtuálního materiálu
\mathbf{U}	[mm]	Globální vektor posunutí
\mathbf{u}_e	[mm]	Vektor posuvu elementu
V_0	[mm ³]	Původní objem
σ_e	[MPa]	Napětí e-tého elementu
RR_s	[-]	Odebírací poměr s-tého rovnovážného stavu (ESO)
σ_{max}	[MPa]	Maximální napětí dané struktury
IR_s	[-]	Odebírací poměr s-tého rovnovážného stavu (BESO)
IR_0	[-]	Počáteční hodnota odebíracího poměru (BESO)
EIR	[-]	Vývojový přidávací poměr (BESO)
$\sigma_j^{dovolené}$	[MPa]	Přípustná hodnota napětí pro j-tou návrhovou proměnnou
i	[-]	Číslo iterace
x_j^i	[-]	Hodnota j-té návrhové proměnné
σ_j^i	[MPa]	Hodnota napětí pro j-tou návrhovou proměnnou

F_j^i	[-]	Poměr mezi určitou hodnotou napětí σ_j^i a dovolenou hodnotou napětí, $\sigma_j^{dovolené}$
T_{ref}	[°C]	Referenční teplota bobtnající a smršťující struktury
σ_n	[MPa]	Napětí n-tého uzlu
σ_{ref}	[MPa]	Cílové napětí struktury
T_n	[°C]	Teplota, která bude předepsána do n-tého uzlu
E_i^e	[MPa]	Elastický modul daného elementu
σ_i^e	[MPa]	Průměrné napětí e-tého elementu dané iterace
E_{i+1}^e	[MPa]	Elastický modul pružnosti e-tého elementu v další iteraci
E_{max}	[MPa]	Maximální modul pružnosti
$(E_e)^{*1}$	[MPa]	Matice elasticity určitého elementu příslušící materiálu *1
$(E_e)^{*2}$	[MPa]	Matice elasticity určitého elementu příslušící materiálu *2
E_e	[MPa]	Matice elasticity elementu
$(M_e)^{*1}$	[kg]	Matice hmotnosti určitého elementu příslušící materiálu *1
$(M_e)^{*2}$	[kg]	Matice hmotnosti určitého elementu příslušící materiálu *2
M_e	[kg]	Matice hmotnosti elementu
W	[J]	Energie napjatosti tělesa Ω
P	[J]	Potenciál vnějšího zatížení
ρ	[t · mm ⁻³]	Hustota
E	[MPa]	Modul pružnosti
μ	[-]	Poissonův poměr
l_a^h	[-]	Dolní mez fáze algoritmu více materiálové OT
$u_{a,temp}^h$	[-]	Horní mez fáze algoritmu více materiálové OT
r_{ab}^h	[-]	Zbývajících objemový poměr
α_b^h	[-]	Objemový poměr fáze b
nel_x	[-]	Počet elementů v ose x
nel_y	[-]	Počet elementů v ose y
m	[-]	Limit změny návrhové proměnné
$(\lambda_j)_{\rho_e}'$	[Hz]	Citlivost vlastní hodnoty vzhledem k návrhové proměnné
γ_0/λ	[-]	Lagrangeův multiplikátor
V_e	[mm ³]	Objem určitého elementu
λ^l	[-]	Dolní mez Lagrangeova multiplikátoru
λ^u	[-]	Horní mez Lagrangeova multiplikátoru
η	[-]	Numerický koeficient tlumení
r_f	[mm]	Rádus filtru
γ	[-]	Konstanta k zabránění dělení nulou
H_{ei}	[-]	Váhový faktor
K_{ρ_e}'	[N/mm]	Citlivost tuhosti
M_{ρ_e}	[kg]	Citlivost hmotnosti
p^K	[-]	Penalizační faktor pro tuhost

p^M	[-]	Penalizační faktor pro hmotnost
$\frac{\widehat{\partial c}}{\partial \rho_e}$	[mm/N]	Citlivost poddajnosti
c_0	[mm/N]	Původní hodnota poddajnosti
c_f	[mm/N]	Finální hodnota poddajnosti po optimalizaci
t	[s]	Čas
f_0	[Hz]	Původní hodnota první vlastní frekvence
f_f	[Hz]	Finální hodnota první vlastní frekvence
Δc	[%]	Změna hodnoty poddajnosti
Δf	[%]	Změna hodnoty první vlastní frekvence

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Optimalizovaná součást, vlevo původní geometrie, vpravo geometrie po optimalizaci topologie, převzato z (Jennings, 2020).....	13
Obr. 2: Systém podstatných veličin, převzato z (Janíček, 2014).....	15
Obr. 3: Tvarová optimalizace, převzato z (Zhang, et al., 2016)	17
Obr. 4: Obecný algoritmus optimalizace topologie, vlastní zpracování	19
Obr. 5: (a) příklad problému strukturální optimalizace, (b) optimalizace velikosti, (c) optimalizace tvaru, (d) optimalizace topologie, převzato z (Sanches, 2015)	20
Obr. 6: Prvek izotropního materiálu o rozměrech $a \times b$ a orientaci θ , převzato z (Querin, et al., 2017)	21
Obr. 7: Problém vícemateriálové optimalizace topologie s angl. označením „Material 1“ a „Material 2“ pro jednotlivé materiály bimateriálového modelu, „void“ je označení pro dutinu a „F“ pro vnější zatížení, převzato z (Suo, et al., 2019)	29
Obr. 8: Systém s jedním stupněm volnosti skládající se z pružiny k a hmoty m , převzato z (Bilošová, 2012)	33
Obr. 9: Bilineární čtyřúhelníkový prvek v kartézském a přirozeném souřadném systému, převzato z (Petruška, nedatováno)	34
Obr. 10: Oblíbenost programovacích jazyků v roce 2020, převzato z (PYPL, 2020)	37
Obr. 11: Konečnoprvková síť pro řešení problému 1 a 3, červeně – elementy, černě – uzly, modře – stupně volnosti, zeleně – síla F , vlastní zpracování	40
Obr. 12: Konečnoprvková síť pro řešení problému 2 a 4, červeně – elementy, černě – uzly, modře – stupně volnosti, vlastní zpracování	40
Obr. 13: OT s cílem minimalizace poddajnosti, Ω #1, vlastní zpracování	47
Obr. 14: OT s cílem minimalizace poddajnosti, Ω #2, vlastní zpracování	47
Obr. 15: OT s cílem minimalizace poddajnosti, Ω #3, vlastní zpracování	48
Obr. 16: Výsledný optimalizovaný tvar pro OT s cílem maximalizace vlastní frekvence pro Ω #1, vlastní zpracování	53
Obr. 17: Výsledný optimalizovaný tvar pro OT s cílem maximalizace vlastní frekvence pro Ω #2, vlastní zpracování	53
Obr. 18: Výsledný optimalizovaný tvar pro OT s cílem maximalizace vlastní frekvence pro Ω #3, vlastní zpracování	54
Obr. 19: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), hliník (modře), Ω #1, problém 3, vlastní zpracování	57
Obr. 20: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), hliník (modře), Ω #2, problém 3, vlastní zpracování	58
Obr. 21: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), titan (zeleně), Ω #1, problém 3, vlastní zpracování	59
Obr. 22: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), titan (zeleně), Ω #2, problém 3	59
Obr. 23: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), hliník (modře), Ω #1, problém 4, vlastní zpracování	63
Obr. 24: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), hliník (modře), Ω #2, problém 4, vlastní zpracování	64
Obr. 25: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), titan (zeleně), Ω #1, problém 4, vlastní zpracování	65
Obr. 26: Výsledný optimalizovaný tvar pro kombinaci materiálů ocel (černě), titan (zeleně), Ω #2, problém 4, vlastní zpracování	65

Obr. 27: Verifikace řešiče statické úlohy, oranžově vyznačen uzel č. 12 podléhající verifikaci, červeně – elementy, černě – uzly, modře – stupně volnosti, vlastní zpracování	66
Obr. 28: Optimalizovaný tvar návrhového prostoru použitý pro verifikaci řešiče statické úlohy, vlastní zpracování	67
Obr. 29: Výsledný posuv dolního pravého uzlu struktury z Obr. 28 pomocí vytvořeného programu v Pythonu, vlastní zpracování	67
Obr. 30: Výsledný posuv dolního pravého uzlu struktury z Obr. 28 pomocí software ANSYS Workbench, vlastní zpracování	67
Obr. 31: Hodnoty vlastní frekvence pro první tři módy vypočítané pomocí ANSYS APDL, vlastní zpracování	68
Obr. 32: Hodnoty vlastní frekvence pro první tři módy vypočítané pomocí vytvořeného programu v Pythonu, vlastní zpracování	68

SEZNAM TABULEK

Tab. 1: Přehled publikovaných algoritmů OT	32
Tab. 2: Výchozí vstupní parametry pro Problém 1	46
Tab. 3: Výsledné hodnoty OT s cílem minimalizace poddajnosti	46
Tab. 4: Vstupní parametry pro porovnání řešení OT jen pomocí Pythonu a řešení s využitím knihovny pyansys.....	49
Tab. 5: Porovnání řešení OT jen za využití Pythonu a řešení s využitím knihovny pyansys	50
Tab. 6: Výchozí vstupní parametry pro Problém 2	52
Tab. 7: Výsledné hodnoty OT s cílem maximalizace vlastní frekvence	52
Tab. 8: Výchozí vstupní parametry pro kombinaci materiálů ocel, hliník	56
Tab. 9: Výchozí vstupní parametry pro kombinaci materiálů ocel, titan	56
Tab. 10: Výsledné hodnoty vícemateriálové OT s cílem minimalizace poddajnosti pro kombinaci materiálů ocel, hliník.....	57
Tab. 11: Výsledné hodnoty vícemateriálové OT s cílem minimalizace poddajnosti pro kombinaci materiálů ocel, titan.....	58
Tab. 12: Výchozí vstupní parametry pro kombinaci materiálů ocel, hliník	62
Tab. 13: Výchozí vstupní parametry pro kombinaci materiálů ocel, titan	62
Tab. 14: Výsledné hodnoty vícemateriálové OT s cílem maximalizace vlastní frekvence, kombinace materiálů ocel, hliník	63
Tab. 15: Výsledné hodnoty vícemateriálové OT s cílem maximalizace vlastní frekvence, kombinace materiálů ocel, titan	65
Tab. 16: Celkové srovnání výsledků optimalizace topologie jednotlivých problémových situací.....	69

PŘÍLOHY

Příložený soubor .zip obsahuje skripty napsané v programovacím jazyku *Python* a *APDL*. Skripty napsané v *Pythonu* se spouští inicializačním souborem `__init__.py`.

Pro úlohu jedno materiálové OT s cílem minimalizace poddajnosti jsou v adresáři *singletop/static* umístěny následující skripty:

- `__init__.py`
- `FEMM.py`
- `filterr.py`
- `OC.py`

Pro úlohu jedno materiálové OT s cílem maximalizace vlastní frekvence jsou v adresáři *singletop/modal* umístěny následující skripty:

- `__init__.py`
- `FEMM.py`
- `filterr.py`
- `OC.py`
- `getsensitivity.py`

Pro úlohu více materiálové OT s cílem minimalizace poddajnosti jsou v adresáři *multitop/static* umístěny následující skripty:

- `__init__.py`
- `FEMM.py`
- `filterr.py`
- `OC.py`
- `bi_top.py`
- `make_bitmap.py`

Pro úlohu více materiálové OT s cílem maximalizace vlastní frekvence jsou v adresáři *multitop/modal* umístěny následující skripty:

- `__init__.py`
- `FEMM.py`
- `filterr.py`
- `OC.py`
- `bi_top.py`
- `make_bitmap.py`
- `getsensitivity.py`

Pro úlohu zahrnující propojení programovacích jazyků *Python* a *APDL* je mezi přílohami adresář s názvem *pyansyss*, který obsahuje:

- `__init__.py`
- `FEMM.py`
- `filterr.py`
- `OC.py`
- `static_structural.mac`

Pro spuštění `__init__.py` z adresáře *pyansyss* je potřeba mít již vyřešenou úlohu v *APDL* s názvem *static_structural*, která se spustí pomocí makra v tomtéž adresáři s názvem *static_structural.mac*. V adresáři je také obsažen binární soubor *el_K_matrix.full*, který obsahuje potřebnou elementární matici tuhosti potřebnou ke spuštění souboru `__init__.py`. V adresáři je také obsaženo makro *el_K_matrix.mac*, které slouží k vygenerování souboru *el_K_matrix.full*, ve kterém je obsažena totožná elementární matice tuhosti jako ve výpočtech v *Pythonu*.

Dále je mezi přílohami adresář *verifikace* se skriptem pro verifikaci řešiče dynamické úlohy s názvem *modal_ver.py*. Pro spuštění skriptu je potřeba v *APDL* vytvořit úlohu s názvem *verif* a nejprve spustit *APDL* makro pro modální analýzu s názvem *modal.mac*.